

Сороковикова О.С.

Програмный комплекс CADAM

1. УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Уравнения мелкой воды (или уравнения Сен-Венана) представляют собой уравнения движения в поле тяжести несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, если глубина слоя жидкости достаточно мала (по сравнению с характерными горизонтальными размерами задачи). В этом случае вертикальной компонентой скорости жидкости можно пренебречь по сравнению с горизонтальной (вдоль слоя), а последнюю можно считать постоянной вдоль толщины слоя жидкости. В этом приближении (называемом гидравлическим) жидкость можно рассматривать как «двухмерную» среду, обладающую в каждой точке определенной скоростью \mathbf{v} и характеризующуюся в каждой точке значением величины h - толщины слоя.

Система уравнений мелкой воды представляет собой законы сохранения массы жидкости и сохранения (изменения) ее импульса при условии постоянства плотности жидкости и без учета действия внешних сил может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} + gh \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hvu}{\partial x} + \frac{\partial \left(hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}{\partial y} + gh \frac{\partial b}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $u = u(t, x, y)$ и $v = v(t, x, y)$ продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, $h = h(t, x, y)$ - глубина жидкого слоя, $b = b(x, y)$ - функция задающая рельеф дна относительно произвольного горизонтального уровня.

Данная система уравнений может быть получена путём интегрирования по глубине уравнений Эйлера с учетом гидростатического приближения для давления при постоянной плотности.

Рассмотрим область:

$$W(x, y, z, t) = \{(x, y, z) | b(x, y, t) \leq z \leq H(x, y, t)\},$$

где $H(x, y, t)$ представляет собой уровень свободной поверхности относительно произвольного горизонтального уровня.

Система уравнений Эйлера в гидростатическом приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial ru}{\partial t} + \frac{\partial ru^2}{\partial x} + \frac{\partial ruv}{\partial y} + \frac{\partial ruw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial rv}{\partial t} + \frac{\partial ruv}{\partial x} + \frac{\partial rv^2}{\partial y} + \frac{\partial ruw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ p(z) &= p_{атм} + \int_z^H \rho g(z) dz \end{aligned} \quad (1.2)$$

Кинематическое граничное условие на свободной поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + u_H \frac{\partial H}{\partial x} + v_H \frac{\partial H}{\partial y} - w_H &= 0 \\ p_H &= p_{атм}(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничное условие на дне:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_b \frac{\partial b}{\partial x} + v_b \frac{\partial b}{\partial y} - w_b = 0 \quad (1.4)$$

Проинтегрируем уравнения (1.2) по высоте в пределах жидкого слоя. Ниже для обозначения средне интегральных величин будет применено следующее обозначение. Пусть расчетной области задана функция $\varphi(x, y, z, t)$. Рассмотрим некоторую точку плоскости (x, y) и выполним интегрирование этой функции по координате z в пределах жидкого слоя:

$$\bar{j}(x, y, t) = \frac{1}{h(x, y, t)} \int_{b(x, y, t)}^{H(x, y, t)} j(x, y, z, t) dz \quad (1.5)$$

Здесь h - толщина слоя, H и b - z -координаты верхней и нижней границы жидкого слоя, соответственно. Определенную таким образом величину $\bar{\varphi}$ будем называть интегральным средним.

Рассмотрим первое уравнение в системе (1.2). Проинтегрируем его по вертикали по жидкому слою:

$$\int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dz + w_H - w_b = 0 \quad (1.6)$$

Применяя к (1.6) формулу Лейбница

$$\int_{b(x)}^{H(x)} \frac{\partial f(x,x)}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{H(x)} f(x,x) dx - f(x,H(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + f(x,b(x)) \frac{\partial b(x)}{\partial x}, \quad (1.7)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} v dz - \\ & - u_H \frac{\partial H}{\partial x} + u_b \frac{\partial b}{\partial x} - v_H \frac{\partial H}{\partial y} + v_b \frac{\partial b}{\partial y} + w_H - w_b = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Учитывая, что толщина слоя выражается через z -координаты его границ $h = H - b$, перепишем (1.8) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial H}{\partial t} + u_H \frac{\partial H}{\partial x} + v_H \frac{\partial H}{\partial y} - w_H \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial t} + u_b \frac{\partial b}{\partial x} + v_b \frac{\partial b}{\partial y} - w_b \frac{\partial b}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь использовано обозначение интегрального среднего:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} u dz; \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{b(x,y,t)}^{H(x,y,t)} v dz \quad (1.10)$$

С учетом (1.3) и (1.4) закон сохранения массы записывается следующим образом:

$$\frac{\mathbb{H}h}{\mathbb{H}t} + \frac{\mathbb{H}h\bar{u}}{\mathbb{H}x} + \frac{\mathbb{H}h\bar{v}}{\mathbb{H}y} = 0. \quad (1.11)$$

Проинтегрируем уравнение баланса импульса для компоненты x скорости. Запишем второе соотношение из системы (1.2) в следующем виде:

$$\mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}ru}{\mathbb{H}t} dz + \mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}ru^2}{\mathbb{H}x} + \frac{\mathbb{H}p}{\mathbb{H}x} dz + \mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}ruv}{\mathbb{H}y} dz + \mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}ruw}{\mathbb{H}z} dz = 0 \quad (1.12)$$

Преобразуем поочерёдно интегралы в (1.12).

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}ru}{\mathbb{H}t} dz = \frac{\mathbb{H}}{\mathbb{H}t} \mathbb{T}_b^H r u dz - (ru)_H \frac{\mathbb{H}H}{\mathbb{H}t} + (ru)_b \frac{\mathbb{H}b}{\mathbb{H}t} = \\ &= \frac{\mathbb{H}(\overline{hr\bar{u}})}{\mathbb{H}t} - (ru)_H \frac{\mathbb{H}H}{\mathbb{H}t} + (ru)_b \frac{\mathbb{H}b}{\mathbb{H}t} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}ru^2}{\mathbb{H}x} + \frac{\mathbb{H}p}{\mathbb{H}x} dz = \frac{\mathbb{H}}{\mathbb{H}x} \mathbb{T}_b^H (ru^2 + p) dz - (ru^2 + p)_H \frac{\mathbb{H}H}{\mathbb{H}x} + (ru^2 + p)_b \frac{\mathbb{H}b}{\mathbb{H}x} = \\ &= \frac{\mathbb{H}(\overline{h(r\bar{u}^2)})}{\mathbb{H}x} + \frac{\mathbb{H}(\overline{hp})}{\mathbb{H}x} - \frac{\mathbb{H}}{\mathbb{H}x} (ru^2 + p)_H \frac{\mathbb{H}H}{\mathbb{H}x} - (ru^2 + p)_b \frac{\mathbb{H}b}{\mathbb{H}x} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Используя соотношение $\overline{ru^2} = \bar{r}\bar{u}^2$, второй интеграл запишем в следующем виде:

$$I_2 = \frac{\mathbb{H}(\overline{h\bar{r}\bar{u}^2})}{\mathbb{H}x} + \frac{\mathbb{H}(\overline{hp})}{\mathbb{H}x} - \frac{\mathbb{H}}{\mathbb{H}x} (ru^2 + p)_H \frac{\mathbb{H}H}{\mathbb{H}x} - (ru^2 + p)_b \frac{\mathbb{H}b}{\mathbb{H}x} \quad (1.15)$$

Остальные интегралы в (1.12) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_3 &= \mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}ruv}{\mathbb{H}y} dz = \frac{\mathbb{H}}{\mathbb{H}y} \mathbb{T}_b^H (ruv) dz - (ruv)_H \frac{\mathbb{H}H}{\mathbb{H}y} + (ruv)_b \frac{\mathbb{H}b}{\mathbb{H}y} = \\ &= \frac{\mathbb{H}(\overline{h(ruv)})}{\mathbb{H}y} - (ruv)_H \frac{\mathbb{H}H}{\mathbb{H}y} + (ruv)_b \frac{\mathbb{H}b}{\mathbb{H}y} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$I_4 = \mathbb{T}_b^H \frac{\mathbb{H}uw}{\mathbb{H}z} dz = (uw)_H - (uw)_b \quad (1.17)$$

Подставим выражения для всех интегралов (1.13), (1.15), (1.16) и (1.17) в (1.12):

$$\begin{aligned}
& \int_b^H \frac{\rho}{\rho} ru dz + \int_b^H \frac{\rho}{\rho} ru^2 dz + \int_b^H \frac{\rho}{\rho} p dz + \int_b^H \frac{\rho}{\rho} ruv dz + \int_b^H \frac{\rho}{\rho} ruw dz = \\
& = \frac{\rho}{\rho} (hr\bar{u}) - (ru)_H \frac{\rho}{\rho} H + (ru)_b \frac{\rho}{\rho} b + \\
& + \frac{\rho}{\rho} (hr\bar{u}^2) + \frac{\rho}{\rho} (h\bar{p}) - (ru^2 + p)_H \frac{\rho}{\rho} H - (ru^2 + p)_b \frac{\rho}{\rho} b + \\
& + \frac{\rho}{\rho} h(ruv) - (ruv)_H \frac{\rho}{\rho} H + (ruv)_b \frac{\rho}{\rho} b + \\
& + (ruw)_H - (ruw)_b = \\
& = \frac{\rho}{\rho} (hr\bar{u}) + \frac{\rho}{\rho} (hr\bar{u}^2) + \frac{\rho}{\rho} h(ruv) + \frac{\rho}{\rho} (h\bar{p}) - p_H \frac{\rho}{\rho} H + p_b \frac{\rho}{\rho} b - \\
& - (ru)_H \frac{\rho}{\rho} H + u_H \frac{\rho}{\rho} H + v_H \frac{\rho}{\rho} H - w_H \frac{\rho}{\rho} H + (ru)_b \frac{\rho}{\rho} b + u_b \frac{\rho}{\rho} b + v_b \frac{\rho}{\rho} b - w_b \frac{\rho}{\rho} b = 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

При постоянной плотности давление в жидком слое изменяется линейно и

$$p_b = p_H + g\rho(H - b) = p_H + g\rho h; \quad \bar{p} = \frac{p_H + p_b}{2} = p_H + \frac{\rho gh}{2} \tag{1.19}$$

С учетом соотношений (1.19) и граничных условий (1.3) и (1.4) из уравнения (1.18) получим:

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}v}{\partial y} + gh \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \tag{1.20}$$

Аналогичными выкладками можно получить проинтегрированное по глубине уравнение для баланса импульса по второму направлению.

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Для построения точных решений, будем рассматривать упрощенную систему исходных уравнений (1.1), предполагая квази-одномерность течения (вдоль поперечного направления все параметры течения постоянны), дно является плоским, и внешние силы отсутствуют. В таком случае, система уравнений (1.1) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Запишем также данную систему в консервативной векторной форме [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{U} = [h, hu, hv]^T, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F} = \left[hu, hu^2 + \frac{1}{2} gh^2, huv \right]^T. \quad (2.4)$$

И в неконсервативной квазилинейной форме [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_x}{\partial t} + A_x \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_x}{\partial x} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\varphi}_x &= [h, u, v]^T, \\ A_x &= \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Собственными числами матрицы A_x являются:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^x = u + c, \\ \lambda_2^x = u - c, \\ \lambda_3^x = u. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Им соответствуют собственные вектора:

$$\begin{aligned} l_1^x &= \left\{ \frac{g}{c}, 1, 0 \right\}^T, \\ l_2^x &= \left\{ -\frac{g}{c}, 1, 0 \right\}^T, \\ l_3^x &= \{0, 0, 1\}^T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь введено стандартное обозначение $c = \sqrt{gh}$. В теории мелкой воды функция c описывает скорость распространения малых возмущений.

Таким образом, система (2.5) может быть приведена к характеристической форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{I}_x}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \mathbf{I}_x}{\partial x} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{I}_x &= [R, Q, v]^T, \quad R_x = u + 2c, \quad Q_x = u - 2c, \\ \Lambda_x &= \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь R_x и Q_x - инварианты Римана. Приведенные различные формы записи исходных упрощенных уравнений (2.1) будут использоваться для построения частных решений.

Гидравлический скачок

Первое элементарное решение уравнений мелкой воды – это движущийся разрыв [1]. Рассмотрим интегральную форму (2.2):

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{U}dx - \mathbf{F}dt) = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

Γ – контур, ограничивающий конечную область интегрирования на плоскости (x, t) .

Разрывное решение уравнения (2.9) найдем в форме бегущей волны $\mathbf{U}(t, x) = \mathbf{U}(\zeta) \equiv \mathbf{U}(x - Wt)$, где $W = \text{const}$ – её скорость. Рассмотрим уравнение (2.9) в ортогональной системе координат (ζ, τ) , связанной с разрывом: $\zeta = x - Wt$ и $\tau = Wx + t$. Вводя преобразования:

$$x = \frac{\zeta + W\tau}{1 + W^2}, \quad t = \frac{-W\zeta + \tau}{1 + W^2}, \quad (2.10)$$

перепишем (2.9) в виде:

$$\frac{1}{1 + W^2} \oint_{\Gamma} [(W\mathbf{U} - \mathbf{F})d\tau + (\mathbf{U} + W\mathbf{F})d\zeta] = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Проинтегрируем (2.11) по прямоугольной области $\tau_0 - \delta\tau \leq \tau \leq \tau_0 + \delta\tau$ и $\zeta_0 - \delta\zeta \leq \zeta \leq \zeta_0 + \delta\zeta$ в области разрыва $\zeta = \zeta_0$. В итоге, получаем:

$$(\mathbf{WU} - \mathbf{F})_1 - (\mathbf{WU} - \mathbf{F})_2 = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Индексы 1 и 2 соответствуют переменным слева и справа от разрыва, соответственно. Пусть \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 постоянны. Тогда на движущемся разрыве \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 и W связаны формулами:

$$W(h_1 - h_2) - (h_1 u_1 - h_2 u_2) = 0, \quad (2.13)$$

$$W(h_1 u_1 - h_2 u_2) - \left(\left(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right) - \left(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right) \right) = 0, \quad (2.14)$$

$$W(h_1 v_1 - h_2 v_2) - (h_1 u_1 v_1 - h_2 u_2 v_2) = 0, \quad (2.15)$$

где u и v – компоненты вектора скорости вдоль оси x и y соответственно. Данные уравнения можно упростить, перейдя в систему координат, связанную с движущимся разрывом. В этой системе координат жидкости будет иметь скорость $V = u - W$. Учитывая это, преобразуем систему (2.13)–(2.15):

$$h_1 V_1 = h_2 V_2, \quad (2.16)$$

$$h_1 V_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 V_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2, \quad (2.17)$$

$$h_1 v_1 V_1 = h_2 v_2 V_2 \quad (2.18)$$

Полученные выражения являются аналогом соотношения Гюгонио для ударной волны. В случае, когда поток массы жидкости через разрыв $m = hV = h_1 V_1 = h_2 V_2$ не равен нулю и выполняется условие равенства тангенциальных скоростей $v_1 = v_2$ имеет место, так называемый, гидравлический скачок. В случае, когда поток массы через разрыв равен нулю, а касательные скорости могут принимать произвольные значения, имеет место тангенциальный разрыв.

Из уравнений (2.16) и (2.17) легко получить компактные выражения для u_2 , h_2 как функции u_1 , h_1 и W :

$$V_2 = \frac{h_1 V_1}{h_2} \quad (2.19)$$

$$V_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} g (h_1 + h_2) \frac{h_2}{h_1}} \quad (2.20)$$

$$m = hV = h_1 V_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} g (h_1 + h_2) h_1 h_2} \quad (2.21)$$

Знак в (2.20) и (2.21) выбирается таким образом, чтобы глубина за фронтом превосходила глубину перед фронтом гидравлического скачка (условие Рэлея). Это условие выбора физически приемлемого решения по аналогии с принципом возрастания энтропии за ударной волной в газовой динамике, и эквивалентно условию уменьшения полной механической энергии жидкости или ее необратимой диссипации на фронте скачка.

Частными случаями являются левый и правый гидравлические скачки. В левом гидравлическом скачке поток жидкости через него вдоль оси x направлен слева направо – $m = (u - W)h > 0$, в правом наоборот $m < 0$.

Обозначим в левом гидравлическом скачке параметры перед фронтом через u_I и h_I , за фронтом u и h . При $h \geq h_I$ (обязательное условие) из (2.16) и (2.17) получаем:

$$\begin{aligned} u - u_I + g \frac{h^2 - h_I^2}{2|m_I|} &= 0, \\ m_I &= \sqrt{\frac{1}{2} g (h_I + h) h_I h}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для левого скачка выполнены неравенства:

$$u_I - c > W > u - c \quad (2.23)$$

А это значит, что характеристики одного из семейств подходят к скачку с обеих сторон. Для правого гидравлического скачка, аналогично, можно получить соотношения, связывающие параметры за фронтом u и h с параметрами перед фронтом u_{II} и h_{II} ($h \geq h_{II}$):

$$u - u_{II} - g \frac{h^2 - h_{II}^2}{2|m_I|} = 0, \quad (2.24)$$

$$m_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} g (h_{II} + h) h_{II} h}.$$

Для правого скачка выполняются неравенства:

$$u + c > W > u_{II} + c_{II}. \quad (2.25)$$

Гидравлический скачок является автомодельным решением относительно переменной $\eta = x - Wt$, где $W = const$. Также решение может быть автомодельным относительно переменной $\xi = x/t$, если движение разрыва задается уравнением $x = Wt$. На плоскости (x, t) такое автомодельное решение будет представлено прямой линией на рисунке 1.

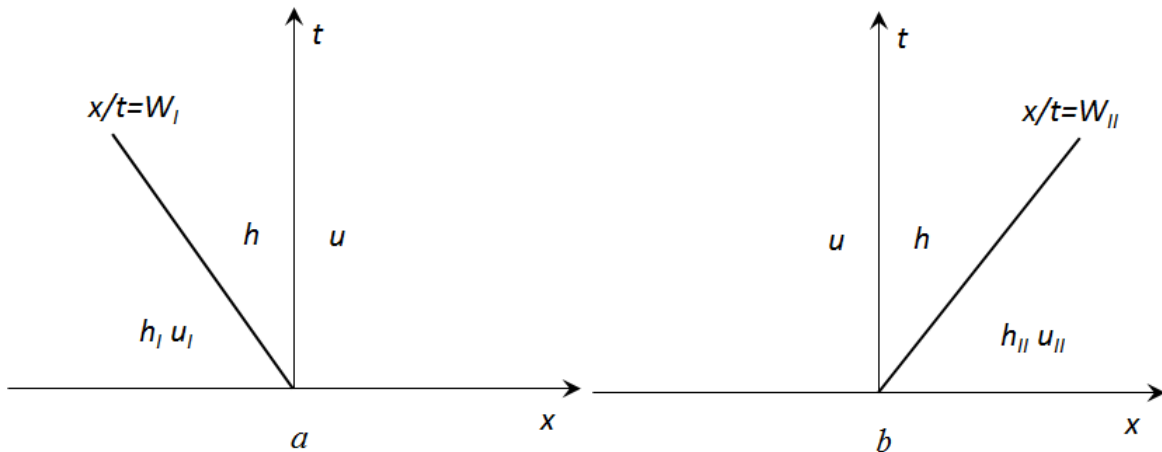


Рисунок 1 – Схема нестационарного течения; а) левый гидравлический скачок; б) правый гидравлический скачок

Волна Римана

Уравнения мелкой воды имеют также непрерывно-дифференцируемые элементарные решения [1]. Они могут быть получены из системы уравнений (2.5). Запишем ее в развернутом виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Будем искать гладкое решение в автомодельном виде $f(x,t) = f(\xi) \equiv f(x/t)$.

Подставляя $h = h(\xi)$, $u = u(\xi)$ и $v = v(\xi)$ в (2.26) получим:

$$\begin{cases} (u - \xi) \frac{\partial h}{\partial \xi} + h \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \\ g \frac{\partial h}{\partial \xi} + (u - \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \\ (u - \xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Система имеет ненулевое решение, если ее детерминант $(u - \xi)((u - \xi)^2 - gh)$ равен нулю. Это условие будет выполнено, если $u - \xi = 0$ или $u - \xi = \pm\sqrt{gh}$. В первом случае $u = \xi$ и $h = 0$, v может быть произвольным. Это формальное решение, не имеющее физического смысла, поскольку $h = 0$. Второй и третий случай ($u - \xi = \sqrt{gh}$ и $u - \xi = -\sqrt{gh}$) соответствуют решениям в виде левой и правой волны Римана, соответственно. Волной Римана (бегущей волной) называют течение, в котором постоянен один из инвариантов Римана. Действительно, при $u - \xi = \sqrt{gh}$ получаем:

$$\begin{aligned} u - c - \xi &= 0, \\ gh_\xi + cu_\xi &= 0, \\ v_\xi &= 0 \Rightarrow v = const. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Второе уравнение эквивалентно соотношению $(u + 2c)_\xi$, т.е. $u + 2c = const$.

Аналогично, для случая $u - \xi = -\sqrt{gh}$:

$$\begin{aligned} u + c - \xi &= 0, \\ gh_\xi - cu_\xi &= 0, \Rightarrow u - 2c = const, \\ v_\xi &= 0 \Rightarrow v = const. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Введем обозначения по аналогии с левым и правым гидравлическим скачком. В левой волне Римана поток жидкости через нее вдоль оси x направлен слева направо - $m = (u - \xi)h > 0$. Внутри самой волны будем обозначать решение с индексом *. Для левой волны Римана выполняются соотношения:

$$u^* - c^* = \xi^*, \quad (2.30)$$

$$u^* + 2c^* = const. \quad (2.31)$$

Обозначим параметры течения перед волной через u_l и h_l , а за волной через h и u . Используя выражение инварианта (2.31) на левой и правой границе волны, получим уравнение связывающие данные параметры:

$$u - u_l + 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_l}) = 0. \quad (2.32)$$

В правой волне Римана поток жидкости через нее вдоль оси x направлен справа налево – $m = (u - \xi)h < 0$, и для нее согласно (2.29) выполнены соотношения:

$$u^* + c^* = \xi^*, \quad (2.33)$$

$$u^* - 2c^* = const. \quad (2.34)$$

Из (2.34) получаем следующее уравнение связывающее параметры справа u_{II} и h_{II} и слева u и h от волны:

$$u - u_{II} - 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_{II}}) = 0. \quad (2.35)$$

Автомодельное решение для левой и правой волн Римана на плоскости (x, t) представлено на рисунке .2.

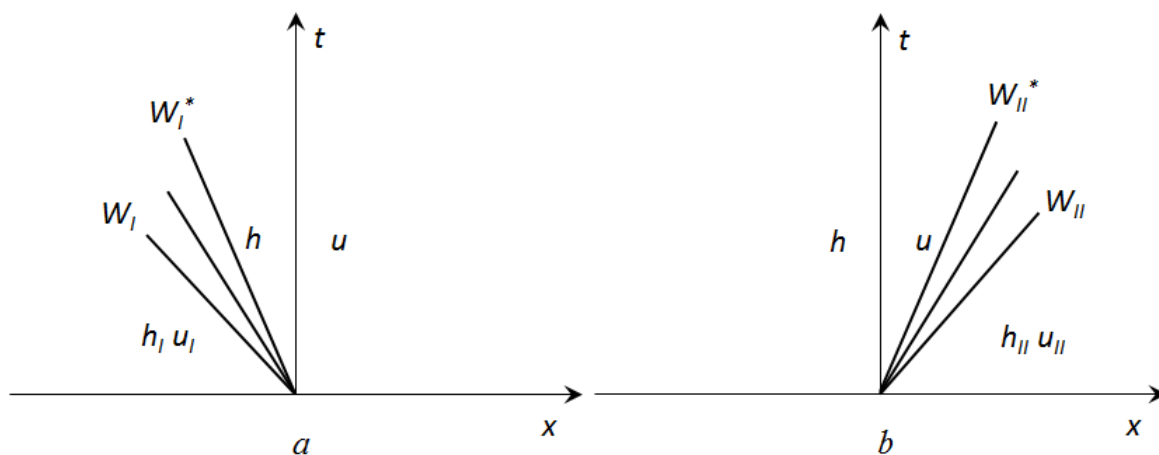


Рисунок.2 – Схема нестационарного течения; а) – левая волна Римана; б) – правая волна Римана

Постановка задачи Римана для уравнений мелкой воды над ровной поверхностью

Сформулируем задачу о распаде произвольного разрыва (задача Римана) для уравнений мелкой воды над ровной поверхностью [1]. Данная задача имеет точное решение. Формулировку задачи Римана запишем в квази-одномерной постановке.

Будем искать решение системы (2.1). В качестве условий Коши используются произвольные кусочно-постоянные начальные значения при $t=0$ для левого ($x < 0$) и правого ($x > 0$) полупространств:

$$\begin{cases} u = u_I, & h = h_I, & x < 0; \\ u = u_{II}, & h = h_{II}, & x > 0; \\ v \equiv 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Наличие третьего условия в (2.36) обеспечивает отсутствие в решении тангенциального разрыва (классическая постановка). Точное решение задачи Римана для уравнений мелкой воды с плоским дном состоит из полученных элементарных решений, разделенных между собой областями с постоянными параметрами, которые также являются решением исходных уравнений.

Если в решении задачи Римана есть скачок, то в этом же решении не может быть волны Римана, распространяющейся в том же направлении из-за противоречий условий (2.23) и (2.30) или (2.25) и (2.33). Следовательно, в каждую из сторон от контактного разрыва может распространяться либо скачок, либо волна Римана. Начальные условия в задаче Римана можно выбрать таким образом, чтобы в решении получались одиночные скачки и волны Римана, либо их двойные конфигурации. Схематично, возможные решения задачи Римана представлены на рисунке 3.

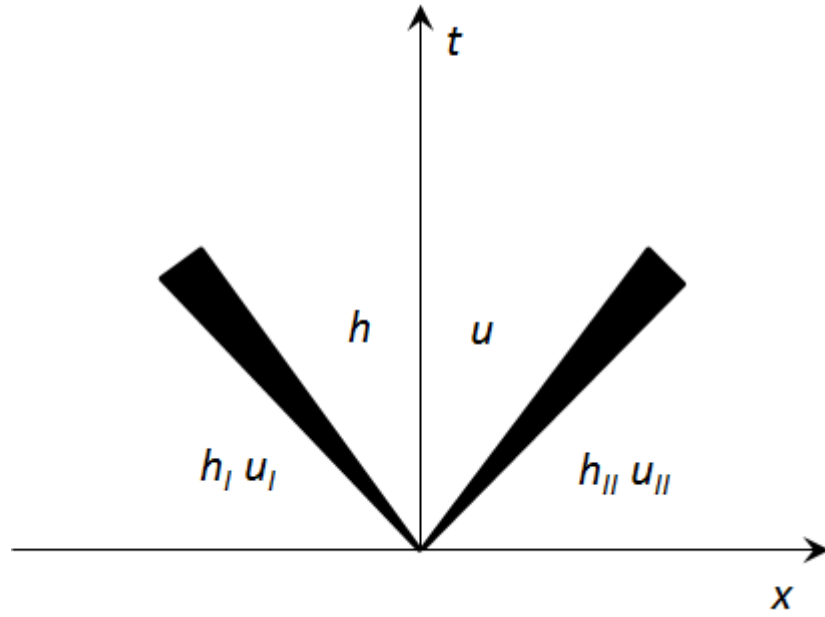


Рисунок 3 – Схема решения общего вида задачи Римана (справа и слева может быть как скачок, так и волна Римана)

Для построения точного решения в общем случае нам необходимо вычислить глубину в центральной зоне. Выражение для данной величины мы можем получить, исключив из уравнений (2.22), (2.24), (2.32), (2.35) – в зависимости от того, какая конфигурация реализуется - величину u , и записать уравнение для h :

$$F(h) = f_I(h, h_I) + f_{II}(h, h_{II}) = u_I - u_{II},$$

$$f_n = f_n(h, h_n) = \begin{cases} \frac{1}{2} g \frac{h^2 - h_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2} g (h + h_n) h_n h}} & \text{при } h \geq h_n, \\ 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_n}) & \text{при } h < h_n, \end{cases} \quad (2.37)$$

Здесь функции $f_I(h, h_I)$ и $f_{II}(h, h_{II})$ описывают решение слева и справа от контактного разрыва. Соответственно, когда выполняется условие $h \geq h_n$, то реализуется гидравлический скачок, когда $h < h_n$ – волна Римана. Данное уравнение можно записать в более компактной форме:

$$F(c) = \varphi_I(c, c_I) + \varphi_{II}(c, c_{II}) = u_I - u_{II},$$

$$\varphi_n = \varphi_n(c, c_n) = \begin{cases} (c - c_n)(\sigma_n + 1) \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sigma_n^{-2})} & \text{при } \sigma_n = c/c_n \geq 1, \\ 2(c - c_n) & \text{при } \sigma < 1, \end{cases} \quad n = \text{I или } n = \text{II} \quad (2.38)$$

Здесь введены обозначения $c = \sqrt{gh}$, $c_n = \sqrt{gh_n}$.

Уравнение (2.38) справедливо в случае, если $c_n > 0$. В том случае, если $c_I = 0$ (в начальный момент времени $t = 0$ глубина слева от контактного разрыва равна нулю) или $c_{II} = 0$ (в начальный момент времени $t = 0$ глубина справа от контактного разрыва равна нулю), то будет существовать единственная волна Римана, соответственно, правая или левая.

Аналитические вычисления показывают, что $\frac{\partial F}{\partial c} > 0$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \geq 0$, поскольку:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = \begin{cases} \frac{2\sigma_n^2 + 1 + \sigma_n^{-2}}{\sqrt{2(1 + \sigma_n^2)}} & \text{при } \sigma_n \geq 1, \\ 2 & \text{при } \sigma_n < 1, \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial c^2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(\sigma_n - \sigma_n^{-1})\left(\sigma_n^2 + \sigma_n^{-2} + \frac{5}{2}\right)}{2c_n(1 + \sigma_n^2)^{3/2}} & \text{при } \sigma_n \geq 1, \\ 0 & \text{при } \sigma_n < 1. \end{cases} \quad (2.40)$$

Таким образом, функция $F(c)$ является монотонной и выпуклой вниз. Вследствие этого, для решения уравнения (2.38) может быть использован итерационный метод Ньютона. Положительность первой и второй производной обеспечивают сходимость итераций при должном выборе начального приближения.

Для решения (2.38) при построении точного решения можно использовать итерационный метод, предложенный в [1]:

$$c^{(m+1)} = c^{(m)} - \left[\varphi_I^{(m)} + \varphi_{II}^{(m)} - (u_I - u_{II}) \right] \left[\left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial c} \right)^{(m)} + \left(\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial c} \right)^{(m)} \right]^{-1}. \quad (2.41)$$

Где m это порядковый номер итерации. В качестве начального приближения берется линейное приближение:

$$c^0 = \frac{1}{4}(u_I - u_{II}) + \frac{1}{2}(c_I + c_{II}). \quad (2.42)$$

В принципе, в силу положительности второй производной, в качестве начального приближения может быть взято любое положительное c^0 удовлетворяющее неравенству $F(c^0) \geq u_I - u_{II}$. c^0 в (2.42) является точным решением (2.38) в случае, когда $c < c_I$ и $c < c_{II}$ (решение представляет собой две бегущие в разные стороны волны Римана).

После нахождения c мы можем вычислить глубину h и скорость u в центральной зоне:

$$\begin{aligned} h &= \frac{c^2}{g}, \\ u &= \frac{1}{2} [u_I + u_{II} + \varphi_{II}(c, c_{II}) - \varphi_I(c, c_I)]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Зная данные значения, на основе ранее полученных соотношений для элементарных решений, мы можем построить общее решение задачи Римана.

Для левого гидравлического скачка поток жидкости определяется как $|m_I| = (u_I - W_I)h_I$. Используя для m_I выражение из (2.22), для скорости разрыва получим:

$$W_I = u_I - c \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sigma_I^2)}. \quad (2.44)$$

Для правого гидравлического скачка $|m_{II}| = -(u_{II} - W_{II})h_{II}$. Откуда, используя соотношение (2.24) для потока жидкости, имеем:

$$W_{II} = u_{II} + c \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sigma_{II}^2)}. \quad (2.45)$$

Для левой волны Римана выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} u^* - c^* &= \xi^*, \\ u^* + 2c^* &= u_I + 2c_I. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Откуда получаем решение внутри самой волны:

$$\begin{aligned}
c^* &= \frac{2}{3}c_I + \frac{1}{3}(u_I - \xi^*), \\
h^* &= \frac{(c^*)^2}{g}, \\
u^* &= \xi^* + c^*.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Левая волна Римана на плоскости (x, t) ограничена лучами $W_I = u_I - c_I$ и $W_I^* = u - c_I^*$ (см. рисунок 4.4.2), где $c_I^* = c_I + \frac{1}{2}(u_I - u)$ определяется из (2.46).

Аналогично для правой волны Римана получаем решение на самой волне:

$$\begin{aligned}
c^* &= \frac{2}{3}c_{II} + \frac{1}{3}(\xi^* - u_{II}), \\
h^* &= \frac{(c^*)^2}{g}, \\
u^* &= \xi^* - c^*,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

и скорости смещения ее границ – $W_{II} = u_{II} + c_{II}$ и $W_{II}^* = u_{II} + c_{II}^*$, где $c_{II}^* = c_{II} - \frac{1}{2}(u_{II} - u)$.

Исходя из задаваемых начальных параметров, можно не проводя полных вычислений определить конфигурацию точного решения поставленной задачи Римана. Пусть, для определенности $c_I < c_{II}$. Функция $F(c)$, как уже было показано, является монотонной и выпуклой вниз. Она пересекает функцию φ_{II} в точке c_I , а функцию φ_I в точке c_{II} . Таким образом, изменения в конфигурации точного решения наблюдаются при переходе через данные точки. В этих точках $F(c)$ принимает значения:

$$\begin{aligned}
F(c_{II}) &= U_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{II} - c_I) \left(\frac{c_{II}}{c_I} + 1 \right) \sqrt{1 + \left(\frac{c_I}{c_{II}} \right)^2}, \\
F(c_I) &= U_I = 2(c_I - c_{II}), \quad F(0) = U_0 = -2(c_I + c_{II}).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

В зависимости от величины $u_I - u_{II}$ возможны следующие случаи, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Возможные реализации задачи Римана

№	параметры	вид решения
1	$u_I - u_{II} > U_{II} \Rightarrow c > c_{II} > c_I$	течение с левым и правым гидравлическим скачком
2	$U_I < u_I - u_{II} < U_{II} \Rightarrow c_I < c < c_{II}$	правая волна Римана и левый гидравлический скачок
3	$U_0 < u_I - u_{II} < U_I \Rightarrow 0 < c < c_I$	правая и левая волны Римана
4	$u_I - u_{II} < U_0$	образование области сухого дна с $h = 0$ и $c = 0$

В случаях 1 – 3 уравнение (2.38) имеет единственное решение. В случае 4 это уравнение решения не имеет – наблюдается область сухого дна $h = 0$, которая в общем случае окаймлена двумя волнами Римана.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ

3.1. Консервативная и характеристическая форма записи полной системы уравнений мелкой воды

Запишем уравнения мелкой воды (1.1) с учетом внешних сил

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = F_x - gh \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial \left(hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}{\partial y} = F_y - gh \frac{\partial b}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Здесь недифференциальный член $\mathbf{F} = [F_x, F_y]^T$, стоящий в правой части уравнений, описывает действие внешних сил.

В консервативной векторной форме система уравнений (3.1) записывается как:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{B} \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{U} = [h, hu, hv]^T, \quad \mathbf{F} = \left[hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, huv \right]^T, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{G} = \left[hv, hvu, hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]^T, \quad \mathbf{B} = \left[0, F_x - gh \frac{\partial b}{\partial x}, F_y - gh \frac{\partial b}{\partial y} \right]^T$$

Эта система уравнений может быть записана также в неконсервативной (квазилинейной) форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} = \vec{f}, \\ \vec{\phi} = \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(F_x/h - \partial b/\partial x) \\ g(F_y/h - \partial b/\partial y) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) можно трактовать как неоднородное локально-одномерное уравнение переноса в направлении \mathbf{x} :

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} = \vec{f} - A_y \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} \quad (3.5)$$

так и в направлении \mathbf{y} :

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + A_y \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} = \vec{f} - A_x \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} \quad (3.6)$$

Обозначим через $\lambda_k^x, k=1,2,3$ собственные числа матрицы A_x , а через $\lambda_k^y, k=1,2,3$ собственные числа матрицы A_y . Все эти числа действительны и имеют вид:

$$\bar{\lambda}^x = \begin{pmatrix} u+c \\ u-c \\ u \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda}^y = \begin{pmatrix} v+c \\ v-c \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где $c = \sqrt{gh}$ – скорость распространения малых возмущений (аналог скорости звука в газовой динамике).

Построим матрицы перехода в характеристическую форму, строки которых состоят из левых собственных векторов:

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} \frac{g}{c} & 1 & 0 \\ -\frac{g}{c} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_y = \begin{pmatrix} \frac{g}{c} & 0 & 1 \\ -\frac{g}{c} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

В силу свойств собственных векторов выполняются тождества:

$$\Lambda_x = \Omega_x A_x \Omega_x^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^x \end{pmatrix}, \quad \Lambda_y = \Omega_y A_y \Omega_y^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^y & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^y \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Умножая последовательно (3.4) на матрицы перехода Ω_x и Ω_y , получим две системы характеристических уравнений:

$$\Omega_x \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \Lambda_x \Omega_x \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} = \Omega_x \left(\vec{f} - A_y \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} \right), \quad (3.10)$$

$$\Omega_y \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \Lambda_y \Omega_y \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial y} = \Omega_y \left(\vec{f} - A_x \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} \right). \quad (3.11)$$

Запишем уравнения (3.10) и (3.11) в развернутой форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial t} + (u+c) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = G_1^x, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial t} + (u-c) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = G_2^x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = G_3^x. \end{cases} \quad (3.12)$$

И

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial t} + (v+c) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = G_1^y, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial t} + (v-c) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{g}{c} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = G_2^y, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = G_3^y. \end{cases} \quad (3.13)$$

Где $\vec{G}^x = [G_1^x, G_2^x, G_3^x]^T$ правая часть уравнения (3.10) и $\vec{G}^y = [G_1^y, G_2^y, G_3^y]^T$ правая часть уравнения (3.11).

Введя обозначения для инвариантов Римана:

$$\vec{I}^x = \begin{pmatrix} u + 2c \\ u - 2c \\ v \end{pmatrix}, \quad \vec{I}^y = \begin{pmatrix} v + 2c \\ v - 2c \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

уравнения (3.10) и (3.11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{I}^x}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \vec{I}^x}{\partial x} &= \vec{G}^x, \\ \frac{\partial \vec{I}^y}{\partial t} + \Lambda_y \frac{\partial \vec{I}^y}{\partial y} &= \vec{G}^y, \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2. Описание численной методики

Пользуясь полученными выражениями в п. 3.1, опишем вычислительный метод на основе балансно-характеристического подхода. Описываемая далее вычислительная методика носит название «КАБАРЕ» [2].

Схема «КАБАРЕ» оперирует двумя типами переменных: консервативными, относящимися к центрам ячеек (определяют значения свойств течения), и потоковыми, которые относятся к центрам граней (отвечают за перенос). В дискретном виде алгоритм решения исходной системы (3.1) представляет собой последовательность трех шагов.

Шаг 1 . Вычисление значений консервативных переменных скорости на половинном временном слое.

Шаг 2. Расчет инвариантов на новом временном слое. Коррекция по принципу максимума. Расчет потоковых переменных.

Шаг 3. Вычисление значений консервативных переменных скорости на новом временном слое.

При заданных граничных условиях по известным значениям консервативных и потоковых переменных на временном слое n однозначно определяются значения всех

консервативных и потоковых переменных на слое $n+1$. После чего цикл, состоящий из трех описанных шагов, повторяется. Распишем алгоритм более подробно.

Введем в прямоугольнике $[X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ неравномерную расчетную сетку с координатами узлов:

$$(x_i, y_i) : \begin{cases} x_1 = X_1, & x_1 < x_2 \dots < x_{N_x} = X_2, \\ y_1 = Y_1, & y_1 < y_2 \dots < y_{N_y} = Y_2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Шаг 1

Воспользуемся консервативной записью уравнений (3.1). Будем предполагать, что внешние силы отсутствуют. Запишем данную систему в разностном виде для нахождения консервативных переменных на промежуточном временном слое:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{[h]_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} - [h]_{i,j}^n}{\tau/2} + \frac{[hu]_{i+1/2,j}^n - [hu]_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{[hv]_{i,j+1/2}^n - [hv]_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} = 0, \\ & \frac{[hu]_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} - [hu]_{i,j}^n}{\tau/2} + \frac{[hu^2]_{i+1/2,j}^n - [hu^2]_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{[huv]_{i,j+1/2}^n - [huv]_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} + \\ & + \frac{g}{2} \frac{[h^2]_{i+1/2,j}^n - [h^2]_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} = -g[h]_{i,j}^n \frac{[b]_{i+1/2,j} - [b]_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \\ & \frac{[hv]_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} - [hv]_{i,j}^n}{\tau/2} + \frac{[huv]_{i+1/2,j}^n - [huv]_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{[hv^2]_{i,j+1/2}^n - [hv^2]_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} + \\ & + \frac{g}{2} \frac{[h^2]_{i,j+1/2}^n - [h^2]_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} = -g[h]_{i,j}^n \frac{[b]_{i,j+1/2} - [b]_{i,j-1/2}}{\Delta y}. \end{aligned} \right. \quad (3.17)$$

Здесь верхний индекс обозначает номер временного слоя, а нижний – пространственное положение, если индекс целый, то величина определена в центре ячейки, дробный – на границе. На первом шаге предиктор получают значения консервативных переменных глубины жидкого слоя и скорости на $n+1/2$ слое по времени.

Шаг 2

На втором шаге используется характеристическая форма записи исходных уравнений. Рассмотрим алгоритм нахождения потоковых переменных на новом

временном слое по одному из направлений (вдоль оси X). Вдоль другого направления алгоритм является полностью симметричным. Введем обозначения:

$$\begin{cases} R = u + 2c, \\ Q = u - 2c, \\ V = v. \end{cases} \quad (3.18)$$

Данным инвариантам соответствуют собственные числа $\lambda_{R=u+c}$, $\lambda_{Q=u-c}$, $\lambda_{V=u}$. Инварианты Римана определяются как для потоковых, так и консервативных переменных. По известным значениям потоковых переменных глубины и скорости течения на n-ом слое и консервативных на n-ом и $n+1/2$ слое находятся соответствующие инварианты в каждой ячейке. Для консервативных переменных на n-ом и $n+1/2$ слое инварианты определяются как:

$$\begin{cases} R_{i,j}^n = u_{i,j}^n + 2\sqrt{gh_{i,j}^n}, \\ Q_{i,j}^n = u_{i,j}^n - 2\sqrt{gh_{i,j}^n}, \\ V_{i,j}^n = v_{i,j}^n. \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} R_{i,j}^{n+1/2} = u_{i,j}^{n+1/2} + 2\sqrt{gh_{i,j}^{n+1/2}}, \\ Q_{i,j}^{n+1/2} = u_{i,j}^{n+1/2} - 2\sqrt{gh_{i,j}^{n+1/2}}, \\ V_{i,j}^{n+1/2} = v_{i,j}^{n+1/2}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Далее производится линейная экстраполяция инвариантов на новый временной слой. Экстраполяция проводится из обеих ячеек прилегающих к грани (рисунок 4):

$$\begin{cases} R_{i+1/2,j,l}^{n+1} = 2R_{i,j}^{n+1/2} - R_{i-1/2,j}^n, \\ R_{i+1/2,j,r}^{n+1} = 2R_{i+1,j}^{n+1/2} - R_{i+3/2,j}^n, \\ Q_{i+1/2,j,l}^{n+1} = 2Q_{i,j}^{n+1/2} - Q_{i-1/2,j}^n, \\ Q_{i+1/2,j,r}^{n+1} = 2Q_{i+1,j}^{n+1/2} - Q_{i+3/2,j}^n, \\ V_{i+1/2,j,l}^{n+1} = 2V_{i,j}^{n+1/2} - V_{i-1/2,j}^n, \\ V_{i+1/2,j,r}^{n+1} = 2V_{i+1,j}^{n+1/2} - V_{i+3/2,j}^n. \end{cases} \quad (3.21)$$

Здесь, подстрочные индексы l и r показывают, из какой ячейки приходит инвариант (согласно обозначениям на рисунке 4).

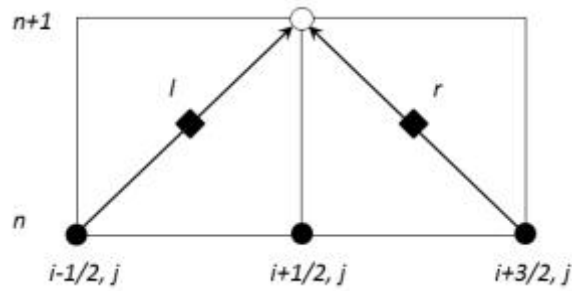


Рисунок 4 – Линейная экстраполяция инвариантов

Далее производится коррекция вычисленных инвариантов по принципу максимума. Максимальные и минимальные значения определяются как:

$$\begin{aligned}
 R_{\min} &= \min \{ R_{i-1/2, j}^n, R_{i, j}^n, R_{i+1/2, j}^n \} + \tau G_1, \\
 R_{\max} &= \max \{ R_{i-1/2, j}^n, R_{i, j}^n, R_{i+1/2, j}^n \} + \tau G_1, \\
 Q_{\min} &= \min \{ Q_{i-1/2, j}^n, Q_{i, j}^n, Q_{i+1/2, j}^n \} + \tau G_2, \\
 Q_{\max} &= \max \{ Q_{i-1/2, j}^n, Q_{i, j}^n, Q_{i+1/2, j}^n \} + \tau G_2, \\
 V_{\min} &= \min \{ V_{i-1/2, j}^n, V_{i, j}^n, V_{i+1/2, j}^n \} + \tau G_3, \\
 V_{\max} &= \max \{ V_{i-1/2, j}^n, V_{i, j}^n, V_{i+1/2, j}^n \} + \tau G_3.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Здесь G_k , $k = 1, 2, 3$ – аппроксимация правой части уравнений (3.12). Тогда коррекция реализуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{i+1/2, j}^{n+1} &= \begin{cases} R_{i+1/2, j}^{n+1}, & R_{\min} \leq R_{i+1/2, j}^{n+1} \leq R_{\max}, \\ R_{\min}, & R_{i+1/2, j}^{n+1} < R_{\min}, \\ R_{\max}, & R_{i+1/2, j}^{n+1} > R_{\max}, \end{cases} \\
 \tilde{Q}_{i+1/2, j}^{n+1} &= \begin{cases} Q_{i+1/2, j}^{n+1}, & Q_{\min} \leq Q_{i+1/2, j}^{n+1} \leq Q_{\max}, \\ Q_{\min}, & Q_{i+1/2, j}^{n+1} < Q_{\min}, \\ Q_{\max}, & Q_{i+1/2, j}^{n+1} > Q_{\max}, \end{cases} \\
 \tilde{V}_{i+1/2, j}^{n+1} &= \begin{cases} V_{i+1/2, j}^{n+1}, & V_{\min} \leq V_{i+1/2, j}^{n+1} \leq V_{\max}, \\ V_{\min}, & V_{i+1/2, j}^{n+1} < V_{\min}, \\ V_{\max}, & V_{i+1/2, j}^{n+1} > V_{\max}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

В случае, когда течение и справа и слева является дозвуковым ($|u| < c$), направление распространения R-инварианта будет слева направо, а Q-инварианта – справа налево. В сверхзвуковом потоке направление распространения данных инвариантов обратное. Наиболее сложным случаем является трансзвуковое течение, в котором может происходить переход через локальное значение скорости звука (звуковые точки). В данном случае, при переходе через узловую точку собственные значения меняют знак, и количество инвариантов, которые приходят в данную точку, может быть на один меньше или на один больше.

В дозвуковом и сверхзвуковом случае алгоритм вычисления инвариантов на новом временном слое следующий.

Если $[\lambda_R]_{i,j}^{n+1/2} + [\lambda_R]_{i+1,j}^{n+1/2} > 0$, то R-инвариант на новом временном слое рассчитывается по величинам из левой ячейки.

Если $[\lambda_R]_{i,j}^{n+1/2} + [\lambda_R]_{i+1,j}^{n+1/2} \leq 0$, то R-инвариант на новом временном слое рассчитывается по величинам из правой ячейки.

Если $[\lambda_Q]_{i,j}^{n+1/2} + [\lambda_Q]_{i+1,j}^{n+1/2} > 0$, то инвариант Q-инвариант на новом временном слое рассчитывается по величинам из левой ячейки.

Если $[\lambda_Q]_{i,j}^{n+1/2} + [\lambda_Q]_{i+1,j}^{n+1/2} \leq 0$, то инвариант Q-инвариант на новом временном слое рассчитывается по величинам из правой ячейки.

Если $[\lambda_V]_{i,j}^{n+1/2} + [\lambda_V]_{i+1,j}^{n+1/2} > 0$, то инвариант V-инвариант на новом временном слое рассчитывается по величинам из левой ячейки.

Если $[\lambda_V]_{i,j}^{n+1/2} + [\lambda_V]_{i+1,j}^{n+1/2} \leq 0$, то инвариант V-инвариант на новом временном слое рассчитывается по величинам из правой ячейки.

Далее, потоковые значения глубины и скорости на новом временном слое находятся из полученных инвариантов:

$$\begin{cases} h_{i+1/2,j}^{n+1} = \frac{1}{g} \left(\frac{1}{4} (\tilde{R}_{i+1/2,j}^{n+1} - \tilde{Q}_{i+1/2,j}^{n+1}) \right)^2, \\ u_{i+1/2,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\tilde{R}_{i+1/2,j}^{n+1} + \tilde{Q}_{i+1/2,j}^{n+1}), \\ v_{i+1/2,j}^{n+1} = \tilde{V}_{i+1/2,j}^{n+1}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Алгоритм обработки «звуковых точек»

В области трансзвукового перехода (случай звуковых точек) выполняется $[\lambda_R]_{i,j}^{n+1/2} * [\lambda_R]_{i+1,j}^{n+1/2} < 0$ или $[\lambda_Q]_{i,j}^{n+1/2} * [\lambda_Q]_{i+1,j}^{n+1/2} < 0$, то есть собственные значения справа и слева имеют разные знаки. В данном случае можно использовать гибридный подход - значения потоковых переменных на новом временном слое находятся из решения локальной задачи Римана, аналогично тому, как это делается в методе Годунова и методах типа Годунова более высокого порядка точности [1].

Рассмотрим две соседние ячейки, разделенные k -ой границей. Будем считать, что скорость и уровень свободной поверхности внутри каждой ячейки являются кусочно-постоянными функциями, а рельеф дна описывается кусочно-линейной непрерывной функцией. Это позволяет вычислить значения глубин h_k^L , h_k^R и скоростей u_k^L , u_k^R на левой и правой стороне k -ой границы (см. рисунок 5а). Далее, найденные значения используются как начальные данные для решения задачи о распаде произвольного разрыва и нахождения потоковых величин глубины и скорости на границе ячейки. Рельеф дна при этом учитывается аддитивным образом аппроксимацией правой части системы.

Величины h_k^L , h_k^R и u_k^L , u_k^R можно вычислить на левой и правой стороне границы со вторым порядком точности по пространственным переменным, если внутри дискретных ячеек функции u и h описываются линейными функциями (см. рисунок 5б). При этом линейное распределение скорости и отметок свободной поверхности внутри ячеек может быть построено применением различных алгоритмов реконструкции, например с использованием функции `minmod` [1].

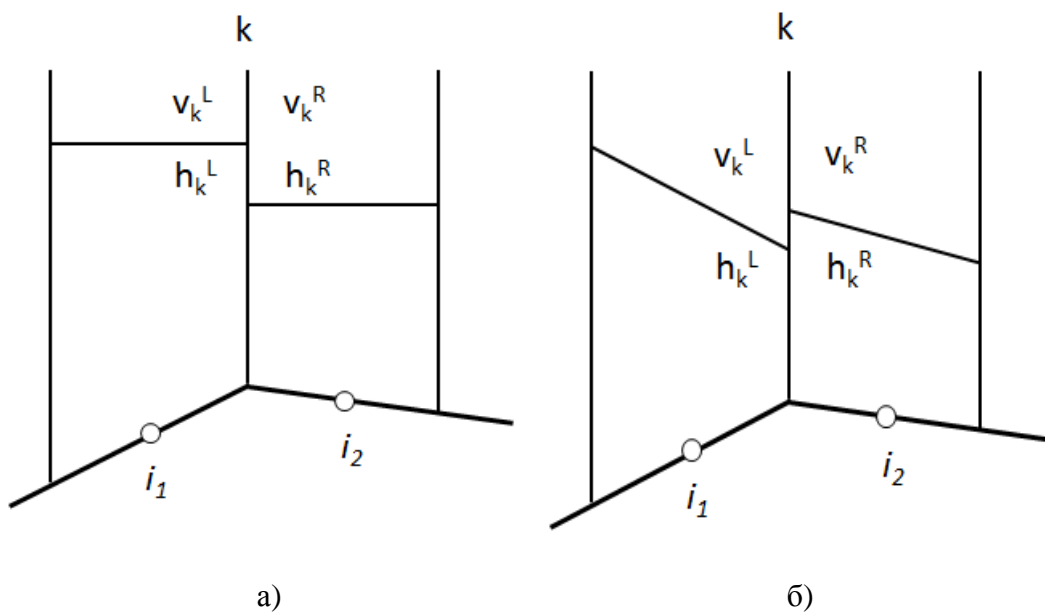


Рисунок 5 – Выбор распределение сеточных функций внутри дискретных ячеек.

Значения тангенциальной компоненты скорости v_k определяется посредством линейной экстраполяции и последующей коррекции, направление распространения V-инварианта определяется по знаку нормальной компоненты скорости, полученной в ходе решения локальной задачи Римана на данной границе. Расчет потоковых значений в звуковых точках по методу Годунова накладывает дополнительные ограничения на шаг интегрирования по времени для обеспечения условия устойчивости. Критерий Куранта для метода Годунова определяется из условия, что волны, возникающие в задаче распада произвольного разрыва на k-ой границе, не должны за шаг τ достигать центра ячеек и искажать решение.

Шаг 3

Шаг 3 аналогичен шагу 1, по вычисленным потоковым переменным на $n+1$ временном слое определяются предварительные консервативные переменные на $n+1$ временном слое:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{[h]_{i,j}^{(n+1)} - [h]_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})}}{\tau/2} + \frac{[hu]_{i+1/2,j}^{(n+1)} - [hu]_{i-1/2,j}^{(n+1)}}{\Delta x} + \frac{[hv]_{i,j+1/2}^{(n+1)} - [hv]_{i,j-1/2}^{(n+1)}}{\Delta y} = 0, \\
& \frac{[h\tilde{u}]_{i,j}^{(n+1)} - [hu]_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})}}{\tau/2} + \frac{[hu^2]_{i+1/2,j}^{(n+1)} - [hu^2]_{i-1/2,j}^{(n+1)}}{\Delta x} + \frac{[huv]_{i,j+1/2}^{(n+1)} - [huv]_{i,j-1/2}^{(n+1)}}{\Delta y} + \\
& + \frac{g}{2} \frac{[h^2]_{i+1/2,j}^{(n+1)} - [h^2]_{i-1/2,j}^{(n+1)}}{\Delta x} = -g[h]_{i,j}^{(n+1)} \frac{[b]_{i+1/2,j} - [b]_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \\
& \frac{[h\tilde{v}]_{i,j}^{(n+1)} - [hv]_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})}}{\tau/2} + \frac{[huv]_{i+1/2,j}^{(n+1)} - [huv]_{i-1/2,j}^{(n+1)}}{\Delta x} + \frac{[hv^2]_{i,j+1/2}^{(n+1)} - [hv^2]_{i,j-1/2}^{(n+1)}}{\Delta y} + \\
& + \frac{g}{2} \frac{[h^2]_{i,j+1/2}^{(n+1)} - [h^2]_{i,j-1/2}^{(n+1)}}{\Delta y} = -g[h]_{i,j}^{(n+1)} \frac{[b]_{i,j+1/2} - [b]_{i,j-1/2}}{\Delta y}.
\end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

Граничные условия

По аналогии с уравнениями Эйлера возможны следующие варианты граничных условий:

- сверхзвуковое втекание,
- сверхзвуковое вытекание,
- дозвуковое втекание,
- дозвуковое вытекание,
- непроницаемая стенка,
- свободное вытекание,
- условие периодичности.

Обозначим индекс данной грани вдоль оси X как «N», а вдоль оси Y – «*». Соответственно индекс центра ячейки вдоль оси X будет «N-1/2». Рассмотрим расчетную ячейку, правое ребро которой соответствует границе области.

При *сверхзвуковом втекании* все потоковые переменные на границе приносятся сверхзвуковым налетающим потоком и определяются инвариантами $R_{\infty,*}$, $Q_{\infty,*}$, $V_{\infty,*}$ на бесконечности, которые приносит поток. Данные инварианты вычисляются по параметрам набегающего потока $h_{\infty,*}, u_{\infty,*}, v_{\infty,*}$.

При реализации *сверхзвукового вытекания* все потоковые переменные приносятся на границу сверхзвуковым вытекающим потоком и определяются инвариантами $R_{N,*}^{n+1}$, $Q_{N,*}^{n+1}$, $V_{N,*}^{n+1}$, как и в случае внутренней грани.

В случае *дозвукового втекания* на границу набегаёт поток с заданными параметрами на бесконечности $h_{\infty,*}$, $u_{\infty,*}$, $v_{\infty,*}$. Поскольку поток дозвуковой, то Q-инвариант приходит с набегающим потоком (справа налево), а R-инвариант приходит изнутри области (слева направо).

В случае *дозвукового вытекания* все рассуждения аналогичные.

В случае условия *непротекания на правой стенке* нормальная составляющая потоковой скорости на правом ребре должна равняться нулю: $u_{N,*}^{n+1} = 0$. Расчетные формулы для остальных потоковых величин будут зависеть от знака характеристических чисел $(\lambda_R^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2}$, $(\lambda_Q^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2}$ и $(\lambda_V^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2}$, вычисленных по значениям консервативных переменных в данной ячейке на половинном слое по времени. Возможны четыре варианта: *натекающий дозвуковой поток на стенку, натекающий сверхзвуковой поток на стенку, дозвуковой поток от стенки, сверхзвуковой поток от стенки*.

При натекающем дозвуковом потоке на стенку $(\lambda_R^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} > 0$, $(\lambda_Q^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} < 0$ и $(\lambda_V^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} > 0$, на правую грань приходят две характеристики. Значения потоковых величин на границе определяются как:

$$\begin{cases} u_{N,*}^{n+1} = 0, \\ v_{N,*}^{n+1} = V_{N,*}^{n+1}, \\ h_{N,*}^{n+1} = (R_{N,*}^{n+1})^2 / 4g. \end{cases} \quad (3.26)$$

При натекающем сверхзвуковом потоке на стенку $(\lambda_R^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} > 0$, $(\lambda_Q^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} \geq 0$, $(\lambda_V^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} > 0$ и на правую грань приходят все три характеристики. Значения потоковых величин на границе также определяются по формулам (3.26).

В случае *дозвукового потока от стенки* $(\lambda_R^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} > 0$, $(\lambda_Q^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} < 0$ и $(\lambda_V^x)_{N-1/2,*}^{n+1/2} < 0$. Тогда на грань приходит только одна характеристика, а система определяющих уравнений оказывается замкнутой, но не полной:

$$\begin{cases} u_{N,*}^{n+1} = 0, \\ R_{N,*}^{n+1} = u_{N,*}^{n+1} + 2\sqrt{gh_{N,*}^{n+1}}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Значение касательной составляющей скорости к стенке в данном случае полагаются равными соответствующим значениям промежуточных консервативных переменных в данной ячейке $v_{N,*}^{n+1} = v_{N-1/2,*}^{n+1/2}$.

При *сверхзвуковом потоке от стенки* на грань не приходит ни одной характеристики. В данном случае все потоковые переменные (кроме нормальной скорости) на новом временном слое полагаются равными их консервативным значениям на половинном слое по времени:

$$\begin{cases} u_{N,*}^{n+1} = 0, \\ v_{N,*}^{n+1} = v_{N-1/2,*}^{n+1/2}, \\ h_{N,*}^{n+1} = h_{N-1/2,*}^{n+1/2}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Граничное условие *свободного вытекания* ставится при расчетах течений в каналах при достижении в точках границы условий квазистационарности, которое в символьном виде иногда записывается как:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial D} = 0, \\ \vec{\phi} = (h, u, v)^T. \end{cases} \quad (3.29)$$

При этом течение может быть и вихревым, тогда условие трактуется как осредненное по конечному отрезку времени Δt .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н. В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 608 с.
2. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. 2013, Москва, из-во Московского университета, 467 с.