



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

Nuclear Safety Institute

Турбулентность и её моделирование

А.С. Филиппов

8-495-955-22-19, phil@ibrae.ac.ru

Москва

2017

Литература: рекомендуемая, цитируемая

1. И.О. Хинце, Турбулентность. М., Наука, 1963 (физические основы)
2. D.C. Wilcox, Turbulence modeling on CFD. 1992 (и более поздние издания; модели турбулентности: k - ω , k - ε , ...)
3. S.B. Pope, Turbulent flows (основы, модели)
4. ANSYS Fluent 6.3, 12.2-16.2: User's guide (6.3), Theory guide (12.1.4-16.2)
5. А.Ю. Снегирёв. Численное моделирование турбулентных течений. СПб. 2009
6. М. Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа. М., Мир, 1986
7. П.Г. Фрик. Турбулентность: модели и подходы. 2010 г.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика (т. X)
9. А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. М., Наука, 1963
10. И.А. Белов, С.А. Исаев. Моделирование турбулентных течений. СПб. 2001
11. К.Н. Волков, В.Н. Емельянов, Моделирование крупных вихрей в расчётах турбулентных течений, М., Физматлит, 2008

Время от времени появляются новые малотиражные курсы лекций, издания вузов etc.

- Как счесть деревья? - смеясь, сказал Степан Аркадьич ...
- Сочесть пески, лучи планет хотя и мог бы ум высокий...
- Ну да, а ум высокий Рябинина может. И ни один купец не купит не считая ...

Л.Н.Толстой. Анна Каренина

Варианты классификации:

Турбулентность как гидродинамическое явление

Примеры:

**– возникновение и развитие (вниз по течению)
турбулентности в стационарных потоках**

Обтекание тел (цилиндр), струи, погран. слой

Физика потока жидкости, конфигурация и устойчивость

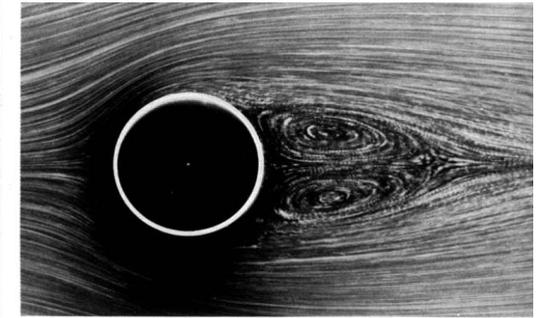
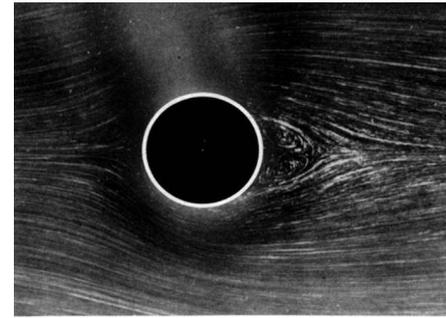
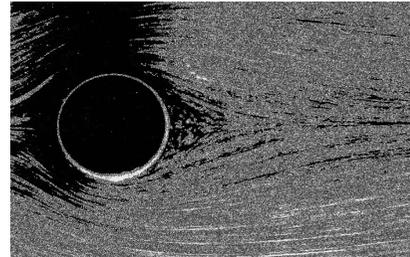
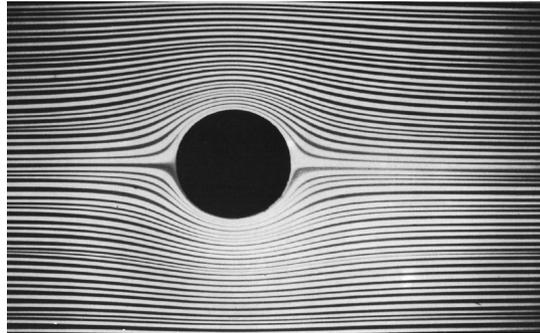
<p>По состоянию вещества: кинетика, термодинамика и др.</p>	<p>По источнику и границам потока</p>	<p>По состоянию потока - (не)устойчивость</p>
<p><u>Сжимаемость</u> $u_{\max} - u_{\min} \ll c$: несжимаемая $u_{\max} - u_{\min} < c$: дозвуковая $u_{\max} - u_{\min} \geq c$: (сверх)звуковая - Волны, скачки уплотнения, ...</p>	<p><u>"Пристеночный" поток</u> : обтекание, поток в канале, в системе границ или каналов etc. (Внешние границы)</p>	<p><u>Рэля-Тэйлора:</u> Архимедова сила: нормальное давление (критерий Рэля)</p>
<p><u>Многофазность: граница раздела</u> - одна фаза; - две и более фаз – межфазный обмен: импульс, масса, тепло ...</p>	<p><u>Большой объём</u> (своб. конвекция, струи, ...): границы и структура устанавливаются потоком</p>	<p><u>Кельвина-Гельмгольца :</u> Тангенциальные силы (крит. Рейнольдса и т.п.)</p>
<p><u>Силовые поля:</u> гравитация – понятно ..., МГД – сложно, там свои неустойчивости</p>		<p><u>Аналогичные ...</u> (вращ. цилиндр, ...)</p>

Все три фактора существенны, встречаются в разных комбинациях. Состояние (устойчивость) потока в общем определяется соотношением дестабилизирующих факторов и стабилизирующих (объёмные силы, инерция, вязкость ... : Re , Ra , ...) **Неустойчивость – новое состояние течения** (не самого вещества ...).

Турбулентность потока – развитая неустойчивость. "Развитая" означает установление новой структуры потока, часто допускающей упрощённые описания

"Структуризация" потока при росте скорости (энергия, импульс)

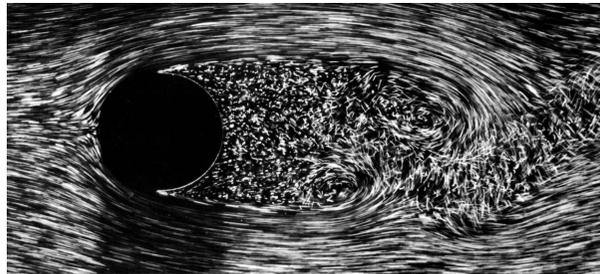
Обтекание: от потенциального течения – к ламинарному (см. Ван-Дайк)



41. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 13,1$. 42. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 26$.

$Re_c=1$ → $Re_c=26$

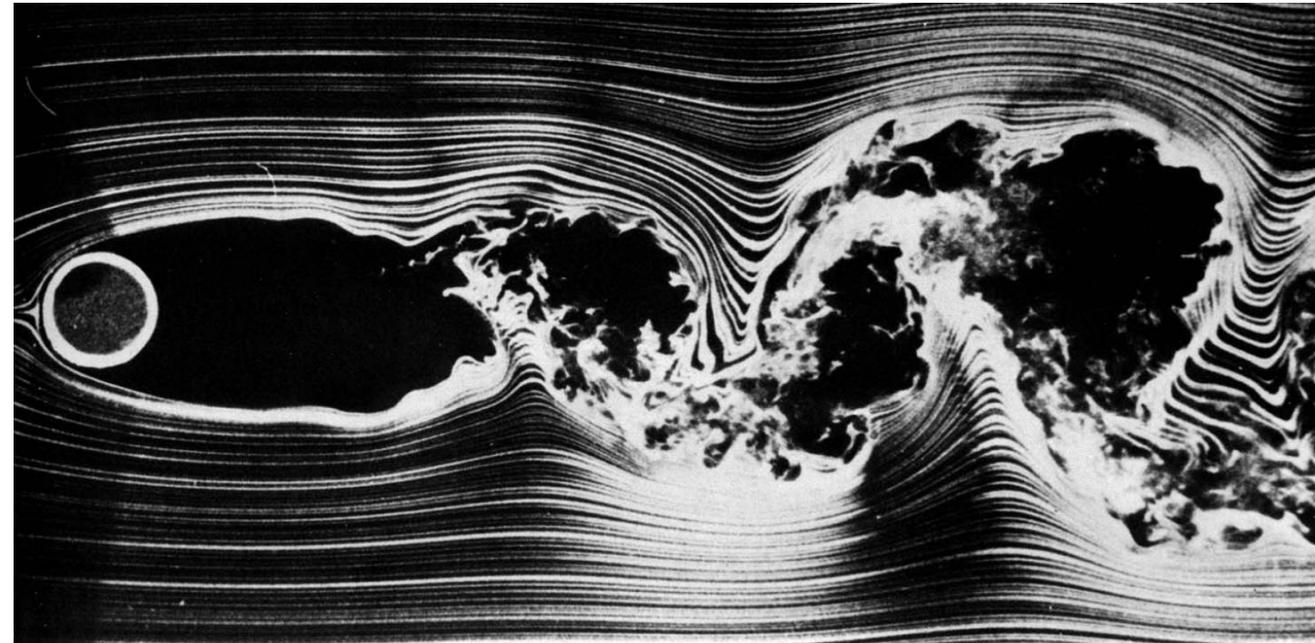
И – к турбулентному –



47. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 2000$. При таком числе Рейнольдса можно уже постоянно говорить о пограничном слое. В передней части этот слой ламинарен, затем он отрывается и разрушается, превращаясь в турбулентный след. Говня отрыва, провалившись вперед по мере возрастания числа Рейнольдса, здесь уже достигли своего предельного положения в направлении вверх по потоку, находящегося впереди сечения максимальной толщины. Визуализация осуществляется с помощью воздушных пузырьков в воде. Фото ONERA. [Werlé, Gallon, 1972]

$Re_c=2000$

$Re_c=10\ 000$



48. Обтекание кругового цилиндра при $Re = 10\ 000$. При скорости, в пять раз превышающей скорость потока на предыдущем снимке, картина течения не претерпевает серьезных изменений. Коэффициент сопротивления, следовательно, остается почти по-

стоянным в диапазоне чисел Рейнольдса, охватываемом этими двумя снимками. Этот коэффициент снижается позднее, когда, как показано на фото 57, пограничный слой становится турбулентным уже в месте отрыва. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

Развитие турбулентности в потоке – результат неустойчивости

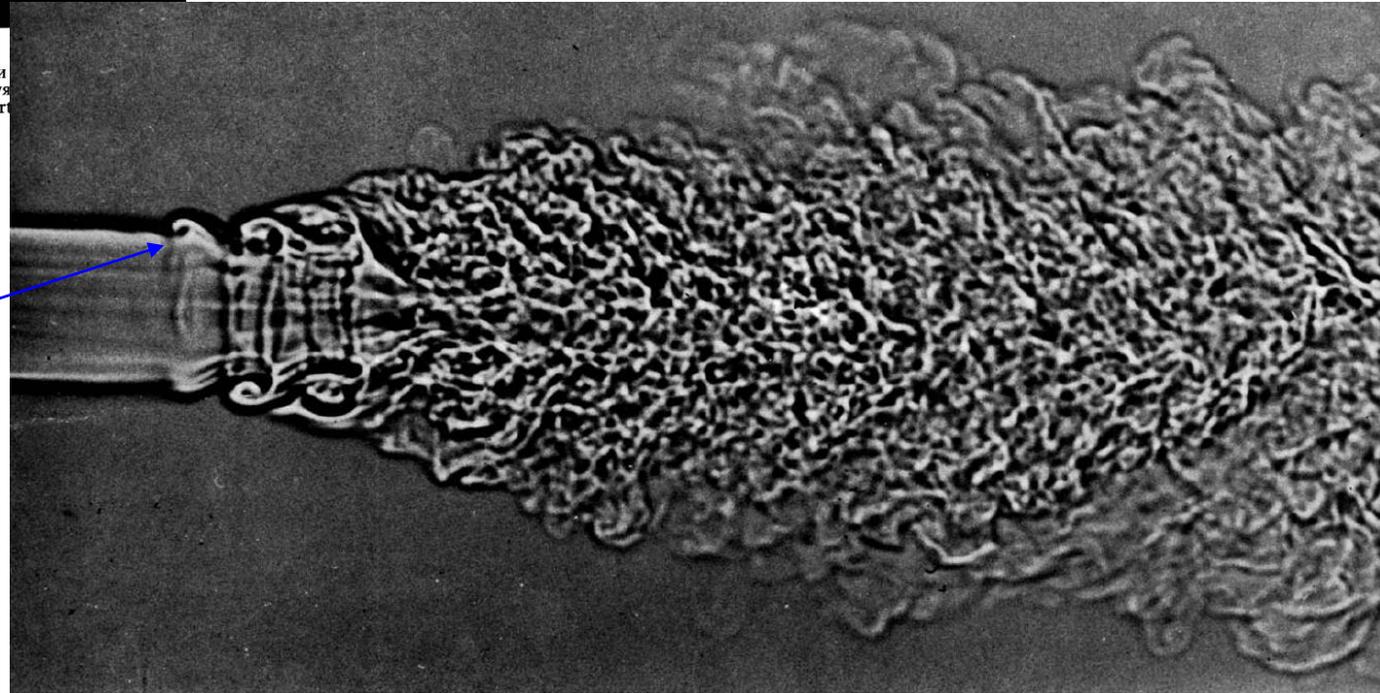
От ламинарного – к турбулентному:
развитие турбулентности в затопленной
струе вниз по потоку



$Re_{tube}=30\ 000$

102. Неустойчивость осесимметричной струи. Ламинарный поток воздуха вытекает из круглой трубы при числе Рейнольдса 10 000 и визуализируется с помощью дымовой проволоочки. Во внешней области струи развиваются осесимметричные колебания, затем эта область струи превращается в вихревые кольца, после чего струя становится турбулентной. Фото Robert san Nagib

$Re_{tube}=10\ 000$



117. Неустойчивость круглой струи. Эта теневая фотография демонстрирует струю углекислого газа диаметром 1/4 дюйма, вытекающую в воздух при скорости 127 фут/с. Когда струя вытекает из сопла при числе Рейнольдса, равном примерно

30 000, она ламинарна. На расстоянии одного диаметра вниз по потоку струя обнаруживает неустойчивость, после чего происходит образование вихревых колец и переход к турбулентности. Фото Fred Landis, Ascher H. Shapiro

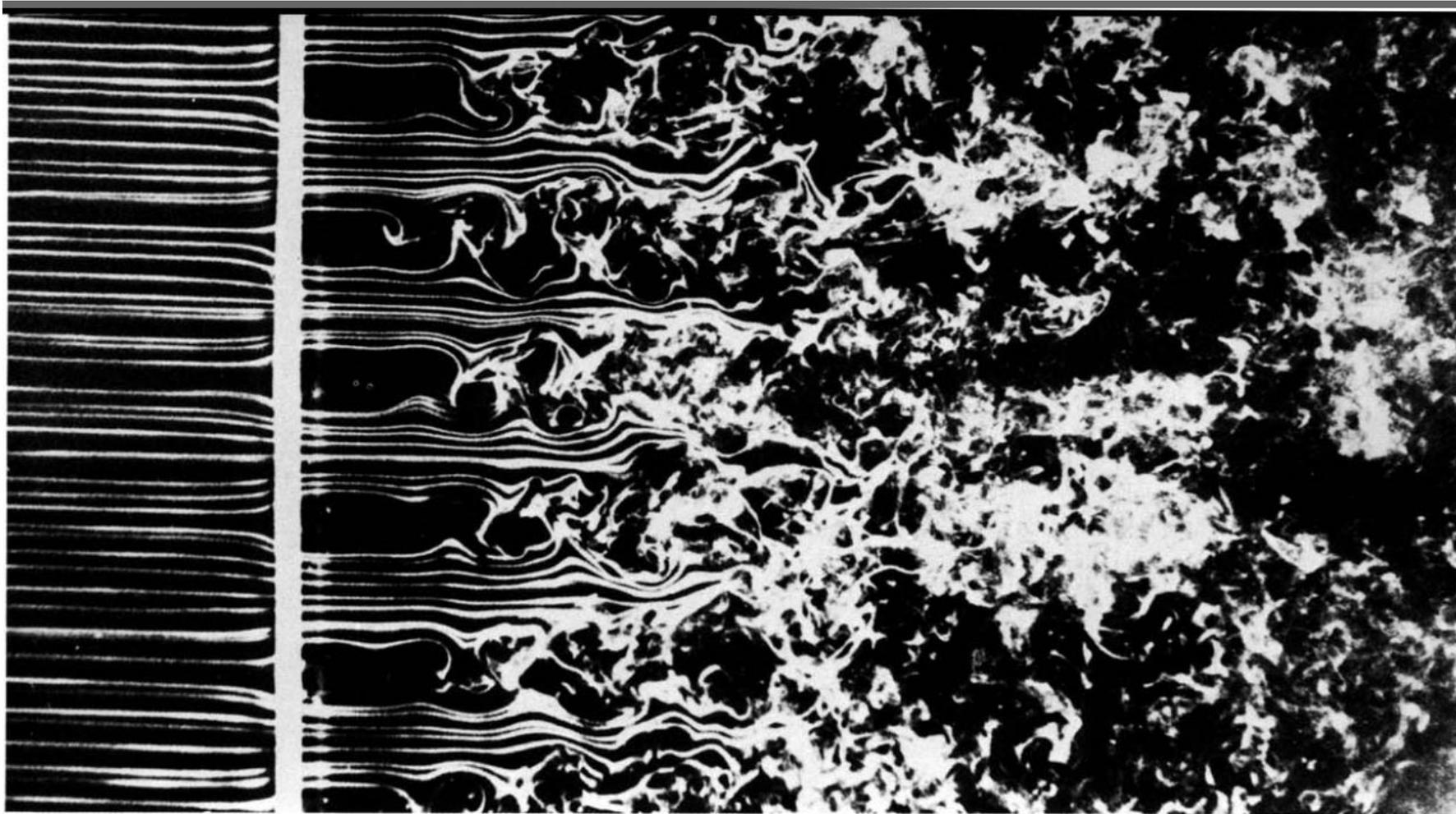
Развитие неустойчивости
на границе струи

Физический механизм –

неустойчивость
тангенциального разрыва

Развитие турбулентности и "развитая турбулентность"

От ламинарного – к турбулентному: развитие вниз по потоку – перемешивающая решётка – множественные струи



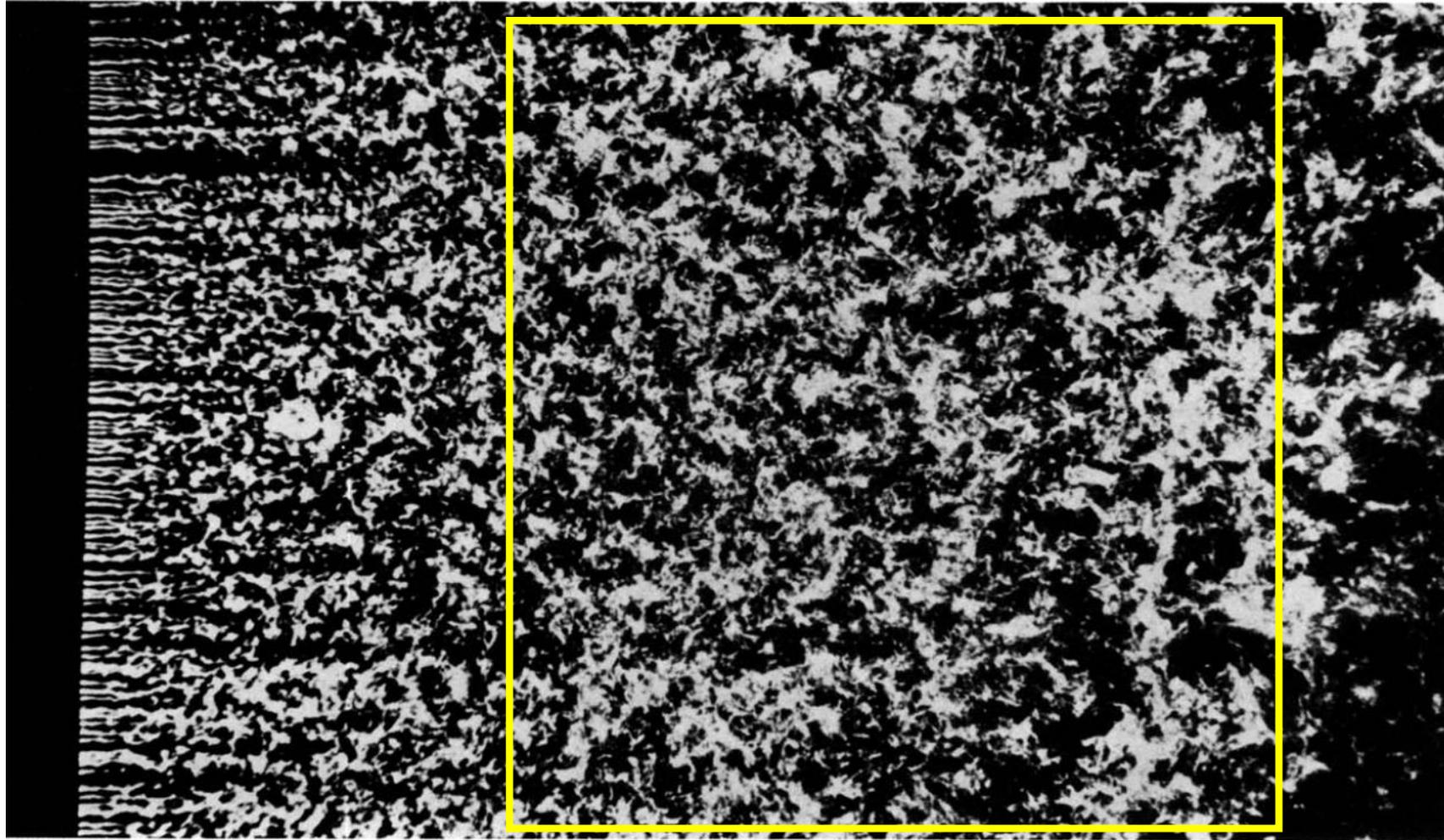
Длина
установления

152. Порождение турбулентности решеткой. Дымовые проволочки демонстрируют прохождение однородного ламинарного потока через пластинку толщиной 1/16 дюйма с квадратными перфорациями размером 3/4 дюйма. Число Рейнольдса, рас-

считанное по однодюймовому размеру ячейки решетки, равно 1500. Неустойчивость сдвиговых слоев приводит к развитию турбулентности вниз по потоку. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

Развитие турбулентности и "развитая турбулентность"

Однородная, изотропная турбулентность – излюбленный объект теоретических изысканий и прямого численного моделирования турбулентности (**D**irect **N**umerical **S**imulation)

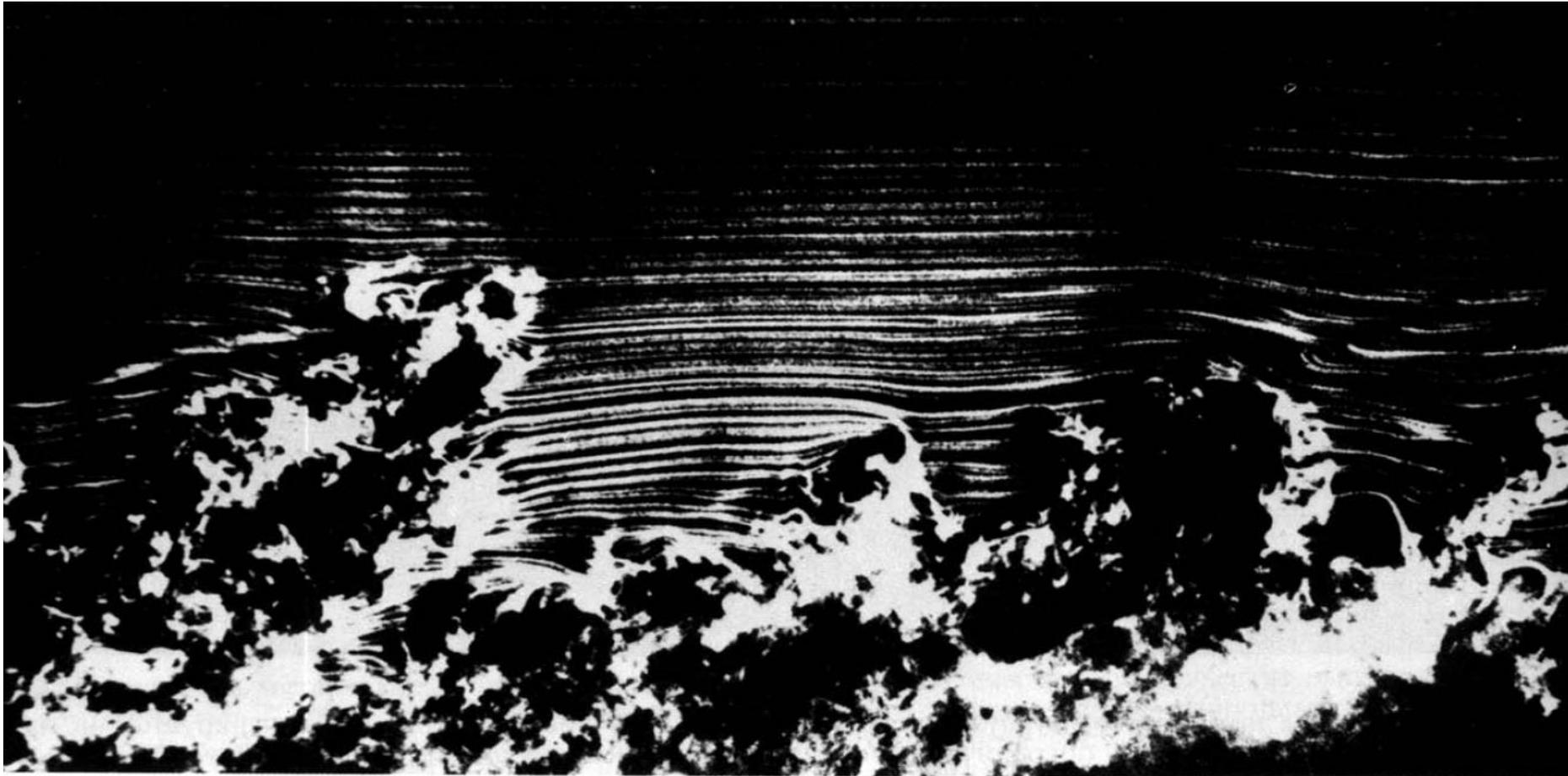


153. Однородная турбулентность за решеткой. За решеткой более частой, чем на предыдущем снимке, сливающиеся неустойчивые следы быстро образуют однородное поле. По мере затухания

вниз по потоку это поле становится полезным приближением идеализированной модели изотропной турбулентности. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

Локализованная и перемежающаяся турбулентность

Турбулентный погран. слой – камень преткновения LES моделей турбулентности – *неоднородная, неизотропная турбулентность*



157. Турбулентный пограничный слой, вид сбоку. Здесь турбулентный пограничный слой развивается естественным образом на плоской пластинке длиной 3,3 м, подвешенной в аэродинамической трубе. Линии меченых частиц, идущие от дымовой проволоки, поставленной вблизи острой перед-

ней кромки, освещаются вертикальным световым ножом. Число Рейнольдса, рассчитанное по толщине потери импульса, равно 3500. Хорошо видна перемежающаяся структура слоя в его внешней части. Фото Thomas Corke, Y. Guezennec, Hassan Nagib

Турбулентность: (ан)изотропия, (не)однородность

Пристеночная турбулентность, анизотропия структуры потока у стенки:

- Поток в круглой трубе и щели – $Re > 2300$... (неустойчивость, метастабильность при гладких стенках – до $Re = 50000$)
- Конвекция в большом объёме с простыми границами (плоские ...)

Свободная турбулентность (частично может быть однородной и изотропной):

- Вихревая дорожка за цилиндром – переходит в "турбулентный след" при росте скорости потока – взаимодействие вихрей, "спектр заполняется" ...;
- Затопленные струи; перемешивающие решётки ("много струй");
- Конвективные струи: термики, шлейфы (факелы) – аналогично ...;
- Конвекция Рэлея-Бенара (Р-Т неустойчивость) – "много термиков";

Развитие и вырождение турбулентности во времени и пространстве

Постепенность установления турб., в ряде случаев – "неразвитость" :

- постепенность при росте скорости потока, во времени и вдоль по потоку – "развитие" (примеры: струя, диффузор, ...);
- обычно и при сложных границах – «перемежаемость» (см. у Хинце и др.);
- затухание при уменьшении источника энергии потока – "вырождение";

Практически все течения, рассматриваемые в статистической теории, относятся к развитой квазистационарной и изотропной турбулентности. Отдельно следует рассматривать пристеночную турбулентности, когда стенка формирует поток.

Турбулентность – главное в гидродинамике турбулентного потока

- Как гидродинамическая неустойчивость турбулентность возникает “почти всегда” в теплообменных аппаратах АЭС, где силы в потоке достаточно велики для "срыва" ламинарного в турбулентный поток;
- Во многом определяет картину течения и характеристики потока;
- Влияет на перенос и приграничный обмен: импульс, энергия, масса;
- Зависит от условий (границы, скорости в потоке, объёмные силы, ...);
- В вычислительной гидродинамике (ВГД: CFD) детали турбулентного потока в практически важных случаях не могут быть определены. Но для стоящих задач мелкие детали строения потока часто несущественны – важны средние;
- Для осреднённого описания – *модели* турбулентности.

Для проведения и понимания результатов моделирования турбулентных течений необходимы знание и опыт работы с моделями турбулентности

Турбулентность – гидродинамическое (не микро-) явление. Её описание – в рамках МСС, и, обычно – не детальное, а модельное

- Полагается, что уравнения Навье-Стокса (УНС) описывают турбулентное течение вязкой жидкости ($s_{ik} \sim \nabla_i u_k$), **существует минимальный масштаб δ** пульсаций в турбулентности и $\delta \gg \lambda$, длины пробега молекул. То же – для масштаба времени – нет необходимости уточнять или вводить новые уравнения (хотя линейность закона трения – слабое место УНС при сильной турбулентности ...)
- Предположение о выполнимости УНС позволяет также рассчитывать на успех применения **анализа размерностей**.
- Но УНС не могут быть решены аналитически, а только численно. Причём, решения могут не быть корректными по Адамару (существование аттрактора Лоренца: динамический хаос) – неточность нарастает во времени.
- Современная CFD не способна в практически важных случаях разрешать масштаб δ (DNS: только исследовательские расчёты, малые Re, малые размеры области, без границ). Поэтому почти всегда –
- Количественное описание турб. – лишь статистическое (усреднённое). Гидродинамика турбулентности – это "Статистическая гидромеханика" и –
- Уравнения ГД дополняются **моделями турбулентности**. Методология CFD модифицируется, включая эти модели – это дополнительные уравнения. – Какие именно уравнения? – PoI segue ...

Цели, задачи, план семестрового курса

- **Общая характеристика турбулентных течений** (ТТ), ориентированная на модели турбулентности (дополнение, но не дублирование лекций П.С.К.)
 - **Происхождение моделей Т.** – чтобы было понятно, с чем работает CFD
 - **CFD (computational fluid dynamics)** – что это такое? (Далее – в применении к слабосжимаемым ТТ – газодинамика не затрагивается)
 - **Сетка, сеточные примитивы** (ясное понимание простых вещей!)
 - **Базовые возможности, структура меню etc. CFD кода** (на примере FLUENT);
 - **Как решаются уравнения Н-С в CFD-кодах** – схема двух основных подходов;
 - **Граничные условия. Пристеночные функции** – как моделируется пристеночная турбулентность?
 - Особенности турбулентных **свободно-конвективных течений**;
 - **Решение задач**: простые примеры турбулентных течений :
 - а)напорные (труба, обратная ступенька, труба с уступом и теплообменом)
 - б)свободно-конвективные (РБК, вертикальная стенка, ...)
-
- **Зачётная работа** – решение задачи кодом FLUENT

- **Турбулентность и устойчивость потока –**
 - является ли само турбулентное состояние устойчивым?
 - не может ли оно перейти в ещё какое-то, новое устойчивое состояние?
 - **"Внимание, наш самолёт находится в зоне турбулентности ..."**
 - как происходящее в таких случаях (включая "временное прекращение обслуживания пассажиров") связано с вышесказанным?
 - каковы могут быть причины формирования этих зон? "воздушных ям"?
 - **Перемешивающие решётки и прочие турбулизаторы:**
 - зачем их устанавливают? Ведь они тормозят поток и увеличивают расходы на прокачку теплоносителя etc.?
-

Аналогичные вопросы могут быть заданы на зачёте

*Книга по математике начинается словами
"Мы знаем ..."*

И.Ильф, Записные книжки

Общие сведения о подходах

- **Уравнения гидродинамики**
- **Предположения статистического моделирования турбулентности**

Уравнения движения жидкости (для сжимаемой – и ур-е энергии)

- Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

- Ур-е движения – Навье-Стокса :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\mu_2 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u_j}_{\text{линейный 3-н сопротивления, пост. вязкость}} + G_i$$

- **Несжимаемая жидкость:**

линейный 3-н сопротивления, пост. вязкость

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + g_i$$

- Граничные условия ...

ρ – плотность, p – давление, u_i – компоненты скорости, g_i – плотность внешних сил, μ – динамическая вязкость, тензор напряжений: $\sigma_{ik} = -1/3 p \delta_{ik} + s_{ik}$

Замечание: интерпретация слагаемых общего балансного закона

В эйлеровой системе отсчёта – неподвижная система координат, «сетка» контрольных объёмов etc., «сквозь» которую движется сплошная среда – жидкость, твёрдое деформируемое тело, газ ...

"Балансы" и запись слагаемых

– это суть уравнений среды:

Уравнение неразрывности – баланс массы «в точке»

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

• **Ур-е движения – Навье-Стокса – баланс импульса**

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\mu_2 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u_j + G_i$$



Замечание. Уравнения МСС – на ед. объёма. Параметры состояния отнесены к ед. массы и везде умножены на плотность [кг/м³].

Почему "модель" турбулентности в детерминистическом описании?

- Что понимается под термином "модель" в описании турбулентного движения с помощью УН-С и модели турбулентности? Это –

Дополнительные предположения о турбулентном течении, позволяющие рассчитать его средние характеристики также по УН-С, но с добавлением источниковых и др. слагаемых или иных "моделирующих" модификаций.

- Задача разработки модели – задать вид модификации УНС, имеющей заданную точность, допускающей экспериментальную проверку – вид уравнений, способ вычисления коэфф-тов и др.

Условия построения большинства моделей турбулентности :

- Рассматривается установившееся течение – становление турбулентности во времени не рассматривается – структура потока в среднем неизменна (см. также "эргодичность" турб. потока ...)

- "Пространственная структура турбулентного потока" далее обычно понимается в смысле структуры, средней во времени для каждой точке потока

Предположения всех статистических моделей турбулентности

Опыты с турбулентными течениями позволяют заключить, что –

- Существует "среднее" течение : в установившемся турб. течении нет полного хаоса – есть средние значения и (средние) отклонения от них;
- Эргодичность – для вычисления средних по результатам измерений

$$\langle \theta(x, t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, t_0) \omega(\theta) d\theta \quad \Leftrightarrow \quad \langle \theta(x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \theta(x, t + \tau) d\tau, \quad T \gg \tau_{correl}$$

- Существуют min, max масштабы турбулентного течения : пространственные масштабы ($\delta \ll R$) и масштабы времени t, T (масштаб усреднения) – δ и t можно установить по анализу пульсаций ... :

$$R \sim (\text{размер сечения}), \quad \delta \sim (v^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad t \sim \delta/u, \quad T \sim R/U$$

- Квазипериодичность, существование "спектра пульсаций" величин $\Phi(k, t)$ и $F(x, \omega)$ в турбулентном течении (характеризуют структуру потока в пространстве и времени)

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, t) e^{ikx} dk, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$$

- Замечание. Спектр пульсаций непрерывен только приближённо – даже в развитой турбулентности спектр "псевдозаполнен". Но интегральное представление удобно.

Подходы к численному моделированию турбулентности

- **DNS – direct numerical simulation** – "безмодельное" численное решение УНС, свободное от предположений, но *удовлетворяющее физическим критериям пригодности расчётных сеток* и требованиям к качеству схем аппроксимации (важно, т.к. под "DNS" разные авторы могут понимать разные его реализации). Этот критерий в DNS – оценка мин. допустимого размера сетки: $N \sim Re^{9/4}$ (Фрик) – см. ниже.
- **RANS – Reynolds averaged Navier-Stokes (1883)** – осреднение УНС (см.ниже);
Замечание: проводим различие между "**Усреднением**" (получение средних) и "**Осреднением**" (формулировка в терминах средних величин)
- **"Алгебраические модели"** – частный, простейший случай RANS;
- **LES – Large eddies simulation** (версии: VLES, DES etc.) – если осреднение Рейнольдса проводить с учётом распределения пульсаций по частотам, не включая те, что разрешаются сеточным разбиением, то получится заготовка для LES-модели. (Детали – см. обширную литературу ...)
- **"Transitional" модели** – расширения RANS для перемежающейся турбулент.

Нет универсальной и "точной" для всех случаев модели турбулентности

Схема построения RANS модели турбулентности

- (1) **Reynolds Averaged Navier-Stokes** – Осреднение уравнения Навье-Стокса, сведение влияния турбулентности на движение (импульс) к источнику – тензорный объект r_{ik} . Аналогично – для уравнений переноса скаляра (температура, концентрация).
- (2) **"Проблема замыкания"** – как определить компоненты тензора напряжений Рейнольдса r_{ik} ? – Предположения: простая и повсеместно используемая – **гипотеза Буссинеска** и её аналоги – введение **"турбулентной вязкости"**. (Замечание – гипотеза Буссинеска и её недостатки разглядываются и критикуются уже десятки лет, но альтернативной работоспособной в CFD модели пока нет ...)
- (3) **Как определить эту турб. вязкость?** (А) "Алгебраически". (Б) Ввести для неё **ещё уравнение**. Выражается через турбулентную кин. энергию – характеристику потока: Уравнение для ТКЭ. К этому – вводится диссипация ТКЭ и – уравнение для диссипации ТКЭ: $\mu_T \sim \rho k^2/\varepsilon \sim \rho k/\omega$ – **"замыкание" модели турбулентности**.
- (4) В итоге – семейство **двухпараметрических RANS моделей**: k - ε , k - ω , их версии.

Этим ограничивается введение в CFD модели турбулентности (основанные на RANS). После чего – некоторые важные факты из теории и практики CFD на примерах решения типовых задач. Дальнейшее изучение – см. литературу.

*Всё встряхни, пригладь, оправь,
Ни морщинки не оставь ...*

(Стихотворение из детства)

RANS-модели – Reynolds averaged Navier-Stokes

Рейнольдсово осреднение транспортных уравнений: импульса, энергии, концентрации

**Вместо сложного решения более простых уравнений N.-S.
получим простое решение более сложных уравнений RANS**

Замечание. Рассмотрение – для режимов слабой сжимаемости.

В более общем случае – осреднение по Фавру – для энергии, температуры, скорости,

берутся несколько другие определения средних величин, чем для давления и плотности. Результат – практически тот же ...

Зачем нужны осреднённые уравнения, RANS etc.?

- Возможные способы решения практической задачи гидродинамики:

(1) Получение (численно) решения в деталях и его усреднение (по пространству, по времени), т.к. обычно нужно не $\sim 10^{12}$ чисел, а несколько интегралов и пространственных/временных зависимостей.

– Возможно **только в простейших случаях**, представляющих "академический интерес" как тестовые примеры или способ исследования турбулентных решений УНС.

(2) Получение сразу осреднённого решения – этого обычно достаточно.

Но – Решения какого уравнения? И – Всё ли нужное учтено ?

Для этого строится статистическая модель. Исследуются границы точности.

- Таким образом: вместо "усреднения" – "осреднение" – мелкие детали строения потока учтены "в среднем" в самом уравнении (r_{ik}), которое надо получить;

- Как проявляются эти детали, что остаётся при осреднении? – вопрос конкретный, решается "по месту" – с **моделями турбулентности разного класса**

Рейнольдсово осреднение: RANS_1

- Случайная величина в точке, $\theta(x,t)$: задана функцией плотности вероятности $\omega(\theta(x,t))$

- Усреднение ("по ансамблю") $\theta(x,t)$:

(операция получения среднего)

$$\theta^m \equiv \bar{\theta} \equiv \langle \theta(x,t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,t) \omega(\theta) d\theta$$

- Правила усреднения: действие оператора усреднения в разных случаях –

Дано: $a = \bar{a} + \alpha$, $b = \bar{b} + \beta$, $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = 0$

Имеем $\langle a \rangle = \langle \bar{a} + \alpha \rangle = \bar{a}$ Далее:

$$\langle \langle a \rangle \rangle = \langle \langle a \rangle + \alpha \rangle = \langle a \rangle$$

$$\langle c\alpha \rangle = c \langle \alpha \rangle$$

$$\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle, \quad \langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle \alpha\beta \rangle$$

Предельный переход и дифференцирование:

$$\left\langle \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial t}, \quad \left\langle \frac{\partial a}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial x_k}$$

- Двухточечное среднее функции:

$$\langle f(\theta_1(x_1, t), \theta_2(x_2, t), t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t) \omega(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

- 2-точечный момент (корреляция):

$$M_{12} = \langle \theta_1 \theta_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1 \theta_2 \omega(\theta_1(x_1, t), \theta_2(x_2, t)) d\theta_1 d\theta_2$$

- Центральный 2-момент:

$$m_{12} = \langle (\theta_1 - \theta_1^m)(\theta_2 - \theta_2^m) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\theta_1 - \theta_1^m)(\theta_2 - \theta_2^m) \omega(\theta_1(x_1, t), \theta_2(x_2, t)) d\theta_1 d\theta_2$$

Рейнольдсово осреднение: RANS_2

- Средние и пульсационные составляющие:

$$u_i = \langle u_i \rangle + v_i = U_i + v_i, \quad p = \langle p \rangle + \beta = P + \beta, \quad \rho = \langle \rho \rangle + \gamma, \quad G_i = g_i + f_i$$

- Осреднение уравнения неразрывности (слагаемое с γ – мало ...)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial(\langle \rho \rangle U_i + \gamma U_i + \langle \rho \rangle v_i + \gamma v_i)}{\partial x_i} \right\rangle = \\ &= \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial x_i} + \left\langle \frac{\partial \gamma U_i}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \langle \rho \rangle v_i}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma v_i}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

- Осреднение уравнения импульса – подстановка :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)(U_k + v_k)}{\partial x_k} &= \\ = -\frac{\partial(P + \beta)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (U_i + v_i) + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial(U_j + v_j)}{\partial x_j} + g_i + f_i \end{aligned}$$

Рейнольдсово осреднение: RANS_3

$$u_i = \langle u_i \rangle + v_i = U_i + v_i, \quad p = \langle p \rangle + \beta = P + \beta, \quad \rho = \langle \rho \rangle + \gamma, \quad G_i = g_i + f_i$$

- Осреднение уравнения импульса – правая часть:

$$\left\langle -\frac{\partial(P + \beta)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (U_i + v_i) + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial(U_j + v_j)}{\partial x_j} + g_i + f_i \right\rangle =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + g_i$$

- Осреднение уравнения импульса – левая часть:

$$\left\langle \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \rho \rangle + \gamma)(U_i + v_i)(U_k + v_k)}{\partial x_k} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i U_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \gamma v_k \rangle U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle U_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \gamma v_i v_k \rangle}{\partial x_k}$$

- Порядок величины пульсаций плотности,

связанных с пульсациями давления:

$$\frac{\gamma}{\langle \rho \rangle} \sim \frac{\beta}{\langle p \rangle} \sim \frac{\beta}{\langle \rho \rangle c^2} \sim \frac{\langle \rho \rangle v^2}{\langle \rho \rangle c^2} = \frac{v^2}{c^2} = \eta^2 \frac{U^2}{c^2}, \quad \eta = v/U$$

Порядок величины турбулентных слагаемых с пульсацией плотности ?

Рейнольдсово осреднение: RANS_4

- Пять слагаемых с пульсациями, только в одно **не** входит $\gamma \sim \rho \eta^2 (U^2/c^2)$:

$$\frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle}{\partial t}, \frac{\partial \langle \gamma v_k \rangle U_i}{\partial x_k}, \frac{\partial \langle \gamma v_i \rangle U_k}{\partial x_k}, \frac{\partial \langle \gamma v_i v_k \rangle}{\partial x_k}, \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k}$$

- **Интенсивность турбулентности** – по определению: $\eta = \nu/U$. Обычно $\eta < 0,1$, т.е. $\gamma \ll \rho$ при $M < 1$, и существенно только одно слагаемое из этих пяти.

- **Уравнение Рейнольдса (RANS):**

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i U_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} + g_i$$

- **Далее будет говориться в основном о несжимаемой жидкости:**

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i U_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} + g_i \equiv - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial r_{ik}}{\partial x_k} + g_i$$

- **Вводится тензор напряжений Рейнольдса (ТНР):**

$$r_{ik} = - \langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle$$

(1-корреляции компонент пульсаций скорости – это тензорная величина)

Резюме – что получено?

Напомним последовательность предпосылок и действий. Сказано, что :

- Уравнение Навье-Стокса описывает всю гидродинамику *ньютоновской* жидкости, включая детали турбулентного течения;
- Турбулентность как физ. явление *допускает* описание в среднем, при этом средние параметры как правило и представляют основной интерес;
- Не надо получать средние значения из точных решений, они избыточны. Стоит попробовать получить сразу осреднённое уравнение для самих средних.

В результате осреднения получено уравнение RANS:

- “Reynolds averaged Navier-Stokes” отличается от Navier-Stokes дополнительным слагаемым, в котором, надо полагать, и содержатся особенности, связанные с турбулентностью – всё ли у нас готово для её описания в среднем?
- Нет, новые слагаемые неизвестны, это – *макет модели* турбулентности. Необходимо её «**замыкание**» – выражения для компонент ТНР;
- Далее, действуя в этом направлении, следует осреднить и уравнения переноса *других величин* – их отличия от исходного уравнения интерпретируются так же – как слагаемые, описывающие турб. эффект. Проблема замыкания встанет и для этих осреднённых уравнений.
- Эти «замыкающие соотношения» были получены из аналогий и анализа, на которые полезно взглянуть

RANS и другие уравнения: проблема замыкания модели осреднения

- Нужны выражения для компонент **ТНР** (тензор напряжений Рейнольдса) – и это уже за пределами формализма.
- Естественно разложить тензор напряжений на шаровую и девиаторную составляющие: турбулентные «давление» и «касательные напряжения»:

$$-\langle \rho \rangle \langle v_i v_k \rangle = r_{ik} = \frac{1}{3} r_{jj} \delta_{ik} + \left(-\frac{1}{3} r_{jj} \delta_{ik} + r_{ik} \right) \equiv -\frac{1}{3} \langle \rho \rangle 2\kappa \delta_{ik} + \tau_{ik}, \quad \kappa = \frac{1}{2} r_{ik} = \frac{1}{2} \langle v_i v_i \rangle$$

«Давление» - это *турбулентная кинетич. энергия (ТКЭ)* – на ед. массы.

Касательные турб. напряжения в ламинарном потоке ответственны за вязкое трение, откуда –

- Простая формально и прозрачная физически : **гипотеза Буссинеска** (1877г., до Рейнольдса) о **турбулентной вязкости**:

$$\tau_{ik} = 2\mu_{ij}^T \dot{e}_{jk} \rightarrow = \mu_T \dot{e}_{jk}$$

У Буссинеска μ_T не зависело от коорд., что неправильно, т.к. *это не вязкость, не свойство жидкости, а свойство потока*. Как правило, в приложениях турб. вязкость – скалярная функция координат: $\mu_T(x)$. С формальной точки зрения она должна быть тензором 4-го ранга $\mu_{ijkl}(x)$. В обобщениях - берётся тензором 2-го ранга ... Итак, общепринятый феноменологический подход –

Надо найти функцию $\mu_T(x)$ (в обобщениях – компоненты тензора $\mu_{ik}(x)$...). К ней же можно свести и определение турбулентного переноса других величин.

Осреднение уравнений конвективной диффузии: тепло и концентрация (1/2)

- Энтальпия (теплосодержание):

$$h(T) = H / \rho = \int_{T_{REF}}^T \rho C(T) dT \equiv \rho C(T_M)(T - T_{REF})$$

- Средние и пульсационные составляющие:

$$u_i = U_i + v_i, \quad T = \langle T \rangle + \theta$$

- Уравнение для энтальпии – осреднение:

$$\left\langle \frac{\partial \rho C(\langle T \rangle + \theta)}{\partial t} + \frac{\partial \rho C(U_k + v_k)(\langle T \rangle + \theta)}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \frac{\partial (\langle T \rangle + \theta)}{\partial x_i} + S_H \right\rangle$$

- Слабая зависимость $C(T)$ от температуры позволяет ввести ур-е для T :

$$\rho C_m \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle T \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_k \theta \rangle}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} + S_H$$

- Уравнение для концентрации (парциальной плотности среды):

– транспорт и диффузия:

(FLUENT – ур-е для $\rho \langle \alpha \rangle$)

$\langle \alpha \rangle$ – массовая доля)

$$\rho \left(\frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle \alpha \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_k \alpha \rangle}{\partial x_k} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial x_i} D \frac{\partial \langle \alpha \rangle}{\partial x_i} + S_\alpha$$

Осреднение уравнений конвективной диффузии: тепло и концентрация (2/2)

- **Замыкание уравнения транспорта скаляра** (T или α) – по аналогии с гипотезой Буссинеска *полагается пропорциональность* турбулентного потока тепла или массы градиенту. То же – для масс. доли (аналогично переносу импульса):

$$\langle v_k \theta \rangle = \frac{\lambda_T}{\rho C} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} = \kappa_T \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i}$$

где λ_T = турбулентный коэфф. теплопроводности,
 κ_T – коэфф. температуропроводности

- Вводятся турбулентные аналоги **чисел Прандтля и Шмидта** :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} , \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D} \quad - \quad \text{известны. По аналогии:}$$

$$\text{Pr}_T = \frac{\nu_T}{\kappa_T} , \quad \text{Sc}_T = \frac{\nu_T}{D_T}$$

- Кинетические коэффициенты вычисляются:

$$\kappa_T = \frac{\nu_T}{\text{Pr}_T} , \quad D_T = \frac{\nu_T}{\text{Sc}_T}$$

- Сами Pr_T и Sc_T – как в газе (подлежит проверке!) :

$$\text{Pr}_T \approx \text{Sc}_T = 0,7 - 0,85 - 0,9 - \dots$$

Таким образом, турбулентная вязкость даёт все коэффициенты *турбулентного* переноса в газе! Следствие "аналогии Рейнольдса" – турбулентной

Газокинетическая аналогия в турбулентной вязкости и т.п.

- **Длина пути смешения** – газокинетическая аналогия для турбулентной вязкости (в несж. жидкости) – "mixing length" (используется и в RANS-моделях ...)

Аналог – трение в газе (дрейф молекул и "дрейф пульсаций" – см. у Хинце):

$$\tau_{ik} = \mu_T \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\mu_T = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle v_{MIX} l_{MIX} \left(= \frac{1}{2} \langle \rho \rangle v_{MIX}^2 \tau_{MIX} \right)$$

где l_{MIX} – "длина пути смешения" (пробега), v_{MIX} – средняя "скорость движения пульсаций" – газокинетический аналог гипотезы Буссинеска

- **Турбулентная кинетическая энергия (ТКЭ) коррелирует с v_{MIX} :**

$$\kappa = \frac{1}{2} \langle v_i v_i \rangle \approx v_{MIX}^2$$

$$\mu_T \sim \langle \rho \rangle \kappa^{1/2} l_{MIX}$$

– эксперименты показывают, что пульсации v_i и v_k имеют один порядок ... Несмотря на поверхностность газокинетической аналогии, она даёт полезную феноменологию – соотношение между величинами κ , μ_T и введённой l_{MIX} (используется в моделях)

Уравнение для κ выводится, для полного замыкания потребуется l_{MIX}

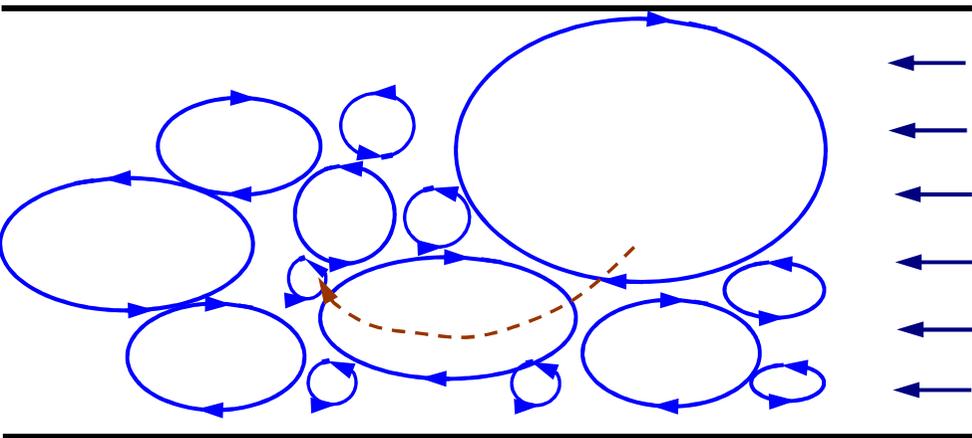
- Ещё масштаб скорости: т.н. "скорость трения" (u_{FR}):
(используется для обезразмеривания у стенки)

$$u_{FR} = \left(\frac{\tau}{\langle \rho \rangle} \right)^{1/2} \approx v_{MIX}$$

Классификация RANS-моделей

- **Алгебраические модели** (непосредственное введение турб. вязкости)
исторически – первые, использовали понятие длины пути смешения (Прандтль)
- **Модели, основанные на уравнении для кин. энергии турбулентности: ТКЭ**
- **1-параметрические** – одно уравнение в част. производных (ЧДУ)
В качестве неизвестного параметра – ТКЭ или турб. вязкость, остальное – в настроечных константах модели;
- **2-параметрические (и более)** – два ЧДУ (к ним, возможно – дополнительные) :
 - 2 : Параметры: ТКЭ и её диссипация, феноменологически связанные с l_{MIX}
 - Дополнительно могут быть: "перемежаемость" и др. (transitional модели)
- **RSM модели** – аппроксимация каждой компоненты ТНР. Линейная или нелинейная по скорости деформаций (при этом теплопроводность и диффузия обычно описываются через один скалярный коэффициент – те же Pr_T и Sc_T – тут в модели нет анизотропии).

Далее – уравнение для ТКЭ и завершение построения 2-параметрической модели



Каскадная передача энергии

...
 Вот пес без хвоста,
 Который за шиворот треплет кота,
 Который пугает и ловит синицу,
 ...
 Которая в тёмном чулане хранится в доме,
 Который построил Джек.

The House that Jack built, Пересказ С.Я.Маршака

RANS модели, основанные на уравнении для турбулентной кинетической энергии (ТКЭ)

0. ТКЭ и её диссипация: они существуют и важны для описания

1. Уравнение для ТКЭ – **вывод уравнения**:

$\langle \text{уравнение для } K \rangle$ – уравнение для $\langle K \rangle$ = уравнение для $\langle k \rangle$

2. Уравнения для **диссипации** ТКЭ – **ввод уравнения** ...

3. Двухпараметрические модели турбулентности k - ε и k - ω

Отступление: структура турбулентности и турб. кин. энергия потока

- Чем выделена *турбулентная кинетическая энергия* в общей энергии движения?
- Формально (и на этом основана процедура вывода уравнения) ТКЭ выделена как *средняя* кин. энергия пульсаций – Что это даёт для построения модели?
- Для ответа вспомним некоторые основные представления о ТТ:
- ТТ является следствием неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в потоке – пульсации сглаживаются трением, но при больших Re оно недостаточно для стабилизации потока: неустойчивость – *вихри*. **Вихрь** сохраняет свой *момент импульса* и в определённых пределах это *устойчивый элемент новой структуры потока*.
- На краях больших вихрей образуются меньшие вихри, они порождают ещё меньшие. Формируется «каскад» вихрей, возникающих и распадающихся. Распределение их средних размеров характеризуется "спектром": зависимостью количества вихрей от их размеров или энергии от волнового числа вихря.
- Энергия поступает извне – «*подпитка*» турбулентности. В стационарном потоке вся она диссипирует – переходит в тепло. Переход в тепло – путём: (а) передачи кин. энергии от больших к меньшим вихрям – "*каскад*", и (б) *диссипации* ε вследствие трения. Каскад – в средних вихрях, диссипация – в малых, которые уже не порождают меньших.
- Таким образом –
- *Часть энергии движения потока существует в виде вихрей;*
- *Вихревое движение необратимо и тем выделено. Его кин. энергия – это ТКЭ.*

Структура турбулентности и трансформация ТКЭ

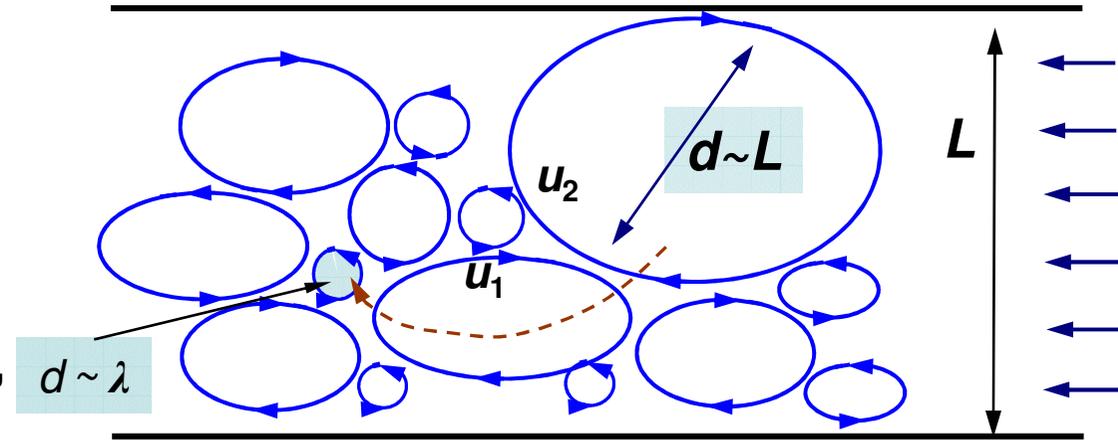
Каскад Ричардсона и существование конечного микромасштаба турбулентности

Большие вихри порождают малые и, как в шестернях, линейная скорость $|u|$ конечна. Трение на границе вихря порождает новый.

Вязкие потери в объеме вихря $\sim V/A \sim 1/d$.

Сила трения $\sim \mu/|u_1|/d$, $|u_1| \sim |u_2|$

При $d \rightarrow 0$ трение охватывает весь объём вихря, и они невозможны, масштаб λ конечен, он не может быть $=0$.



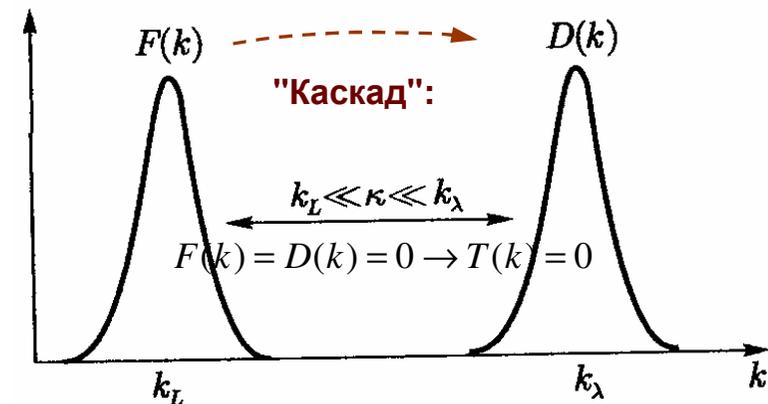
Каскадная передача энергии

Большие вихри передают энергию меньшим почти без диссипации

- Формально пространственный масштаб в преобразовании Фурье, это обратное волновое число k . (Но турбулентный поток не состоит из Фурье-гармоник ...). Вычисляемая спектральная плотность мощности ТКЭ, K_T , включает три слагаемых – функций k . В стационарном потоке:

$$\partial_t K_T(k) = F(k) - D(k) + T(k) = 0 \quad (\text{см. [П.Г.Фрик]})$$

Приток энергии извне F преобразуется в ТКЭ T и уходит в диссипацию D , но в разных диапазонах масштаба пульсации: $F(k)=0$ при больших k , $D(k)=0$ при малых k (см. графики –).



Пульсационная составляющая – в виде $T(k)$. На краях график функции $T(k)$ отвечает $F(k)$ и $D(k)$.

(Напомним, что через k обозначается также удельная ТКЭ (на ед. массы))

Структура турбулентности и пространственные масштабы

- Турбулентный поток – в одной области *геометрического пространства*. В *пространстве скоростей* выделяют три интервала, на которых происходят: *подпитка, каскадная* передача энергии от больших к меньшим вихрям и *диссипация*. – "Ключевой момент теории мелкомасштабной турбулентности" (П.Г.Фрик)
- **Пространственные масштабы (размеры вихрей)** коррелируют с процессами в турбулентном потоке. Выделяют *интервалы* масштабов:
 - **внешний L** : масштаб сечения потока, на котором действует сила в потоке
 - **инерционный l_T** : на котором происходит каскадная передача движения
 - **диссипативный λ** : *микромасштаб, колмогоровская длина*, на котором в основном происходит диссипация (ε – запомним) энергии движения.
- При развитой турбулентности: $\lambda \ll l_T \ll L$ – инерционный интервал «широкий» (Масштаб l_T при осреднении соответствует и некоторым другим определениям ...)
 - Поэтому - наряду с ТКЭ, вторая необходимая величина последовательных RANS моделей – это диссипация (мощность стока) ТКЭ в потоке на ед. массы: «скорость диссипации» ε или относительная скорость диссипации: $\omega = \varepsilon / K_T$.

Полная мощность диссипации = вводимой мощности, формирующей поток

Классификация всех моделей турбулентности по простр. разрешению

При развитой турбулентности: $\lambda \ll l_T \ll L$ – инерционный интервал широкий, и в нём "помещаются" все модели турбулентности:

- **RANS**: масштаб сечения потока $\sim L$: масштаб "закачки" энергии в поток;
- **LES**: до масштаба l_T : $l_T \ll L$ (желательно); при развитой турбулентности $l_T \gg \lambda$;
- **DNS**: до *микромасштаба* λ – все неоднородности потока

Феноменология трансформации ТКЭ в потоке позволяет сделать важные выводы относительно разработки и применения моделей турбулентности:

- Для анализа динамики турбулентного потока *ТКЭ* и её *диссипация* важны не только как формальные параметры модели, но и как физические величины;
- *Наличие структуры турбулентности* тоже важно, т.к. каскадная передача энергии движения формирует сам объект – турб. течение и область (по *k*) диссипации энергии, вкачиваемой в поток;
- То, что диссипация ТКЭ происходит на самых малых масштабах, определяет *требования к прямому моделированию (DNS)* – до микромасштаба, т.к. диссипация ТКЭ – "обратная сторона" притока энергии – обе важны для динамики;
- *В переносе* (примесей, температуры, ...) микромасштаб, вероятно, не так важен, т.к. перенос вихрями не диффузионный, а "прыжковый": от вихря к вихрю – есть примеры успешного применения "квазиDNS" и LES для расчёта объёмного теплообмена etc.;
- Но *модели типа LES охватывают только часть инерционного интервала*. LES может быть полезно в моделировании переноса свободной турбулентностью, но диссипативный интервал не захватывает, в частности – некорректно у стенок в погранслое. Это соответствует многолетней практике применения LES: *при развитой турбулентности для расчёта пристеночного трения нужны подходы a la RANS*;
- Пока единственные полностью замкнутые модели для техники – это (полу)эмпирические типа **RANS**; DNS – не в счёт, по упомянутым причинам

Размерные оценки в мелкомасштабной турбулентности (см. [Фрик])

Предположения теории Колмогорова и анализ размерностей. Масштабы: $\lambda, l \ll L$

- Статист. свойства на масштабах $l \ll L$ не зависят от способа возбуждения турбулентности и определяются: скоростью диссипации ε , кинематической вязкостью ν и длиной l .
- Статист. свойства в *инерционном* интервале $\lambda \ll l \ll L$ универсальны и зависят только от скорости диссипации энергии ε и масштаба l (не зависят от вязкости);
- **Скорость диссипации энергии** ε для данного течения в любой момент времени и в любой точке пространства **одна** и та же. Величина ε определяется энергией, вводимой в поток за ед. времени на единицу массы, передаваемой *до диссипативных масштабов* (замечание – здесь не учитываются флуктуации ε , связанные с перемежаемостью – см. у П.Фрика);

Пользуясь этими гипотезами, можно составить размерные комбинации между немногими характеристиками турбулентности, которые остаются в предположении универсальности.

- **Закон Колмогорова-Обухова для пульсаций скорости** δu_l – одна безразмерная комбинация существенных в инерционном интервале величин $\delta u_l, \varepsilon, l$:

$$\delta u_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$$

- **Энергетический спектр изотропной турбулентности** (з-н Колмогорова, з-н «пяти третей») Спектр. плотность ТКЭ в инерционном интервале зависит от масштаба k и диссипации в данной точке:

$$K_T(k) \sim C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

(здесь $K_T dk$ – удельная энергия)

Размерные оценки и возможности уточнённых подходов

- Оценка микромасштаба турбулентности λ . Исходя из 1-го предположения, этот масштаб может зависеть только от ε и вязкости ν . Подбором размерности –

$$\lambda \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \quad \text{– это т.н. "колмогоровский масштаб"}$$

- Оценка через макропараметры L , среднюю скорость U , и число Рейнольдса $R=Re$:

$$\lambda \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \sim (\nu^3 L / U^3)^{1/4} \sim (\nu^3 L^4 / U^3 L^3)^{1/4} \sim LR^{-3/4}$$

- Если оценить количество возбуждённых степеней свободы в потоке как $(L/\lambda)^3$ (в каждой точке возможен микровихрь), то оценка минимального размера кубической сетки для прямого моделирования (DNS) всей структуры турбулентного потока:

$$N \sim (L / LR^{-3/4})^3 \sim R^{9/4} \quad \text{– что при } R=Re \sim 10^4 \text{ даёт } N \sim 10^9.$$

Таким образом, DNS как универсальный метод анализа турбулентных течений никогда не войдёт в инженерную практику – область применения (числа Re) ограничена, издержки нереально велики, как и требования к квалификации (к оценке достоверности) результатов расчёта.

DNS в *научных исследованиях* применяется уже давно как заменитель эксперимента: для вычисления неизмеримых величин в турбулентности, влияния частиц и др.

LES частично описывает структуру потока на масштабах $< L$, но *надо смотреть, нужно ли это*: в свободной турбулентности – полезно, но в технике границы потока обычно существенны, здесь точность LES в основном объёме избыточна, у границ же она недостаточна, и здесь всё равно используются RANS подходы – *каковы цена/качество?*

Резюме и введение: уравнение для ТКЭ в RANS-модели _1

- **Механическая (кинетическая) энергия турбулентного движения** – ключевое понятие. Её эволюция в потоке – каскад Ричардсона и механизм диссипации – то немногое, что наглядно в ТТ. Кин. энергия пульсационного движения может быть выделена аналогично теплу –
- **Необратимость перехода энергии поступательного движения в мелкомасштабное вращательное и тепло: порождение ТКЭ, её диссипация.** Ещё более наглядный показатель необратимости (но не энергетический) –
- **Интеграл от завихрённости – энстрофия** (получается из уравнения для КЭ) – «пульсационный» аналог энтропии в малом объёме V :

$$\Omega(V(x)) = \frac{1}{2} \int_V |\text{rot } \vec{u}|^2 dV, \quad \Omega(k) \sim k^2 E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{1/3} \quad (k - \text{волновое число!})$$

Ω растёт от больших к малым вихрям, и дробление потока – это энстрофия;

- В двухпараметрических RANS-моделях **ур-я генерации, транспорта и диссипации ТКЭ, т.е. величин k , ε или т.п. важны для замыкания модели;**
- Уравнение для ТКЭ потока есть следствие уравнения движения. Кин. энергия формально учтена в полном уравнении энергии. Но средняя кин. энергия, ТКЭ, достойна отдельного уравнения и вычленяется из полной энергии – см. далее.

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _2: план получения

В RANS-модели **уравнения для ТКЭ и диссипации ТКЭ** есть во всех 2-х параметрических моделях и их расширениях.

Получение уравнения для ТКЭ – последовательность :

- Полная, тепловая и кинетическая энергия потока: *кинетическая* (энергия движения) и *внутренняя* (потенциальная+тепловая):

$$E = I + K = E_P + E_T + K$$

- **Изменение энергии** – транспорт, работа *внутренних* сил, представленных тензором напряжений σ_{ik} , внешние источники – приток тепла и работа внешних сил $=S_e$ ($\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}/3 + s_{ik}$):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u_k E}{\partial x_i} = -\frac{\partial u_k p}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i s_{ik}}{\partial x_k} + S_e$$

- Можно выделить уравнения: а) для энтальпии (тепло); б) для всей внутренней энергии; в) **для полной кинетической энергии (КЭ) потока**
- Вводится средняя КЭ (СКЭ), связанная со средней скоростью, и ТКЭ: КЭ пульсаций (как в RANS). Уравнение для КЭ разделяется на уравнения СКЭ и ТКЭ

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _3: полная КЭ потока

- Кинетическая энергия потока:

$$K = \frac{\rho u_k u_k}{2}$$

Тождество:

$$2\left(\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial \rho u_i u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_k \rho u_i u_i}{\partial x_k}\right) = 2u_i \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k u_i}{\partial x_k}\right)$$

- Уравнение для кинетической энергии может быть получено из уравнения импульса (скорости) его свёрткой с вектором скорости и подстановкой из этого тождества :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial s_{ki}}{\partial x_k}$$

- Оно описывает всю кинетическую энергию потока. Внося определяющее соотношение для тензора вязких напряжений -

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_k p}{\partial x_k} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right)$$

- Для несжимаемой жидкости уравнение полной КЭ примет вид –

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_k K}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_k p}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _4: КЭ пульсаций

- Уравнение для к.э. среднего движения – так же: свёртка RANS с U_i :

(вязкость постоянна)

$$\frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} = - \frac{\partial P U_i}{\partial x_i} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}$$

Вычтем из ур-я для полной КЭ: остаток будет описывать эволюцию ТКЭ

- Аппроксимация слагаемых: введём пульсационные составляющие:

$$u_i = U_i + v_i, \quad p = P + \beta, \quad K = \langle K \rangle + \kappa$$

- Осреднение уравнения полной кинетической энергии K :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho (U_k + v_k)(U_k + v_k) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \rho (U_k + v_k)(U_i + v_i)(U_i + v_i) \right\rangle = \\ & = \left\langle - \frac{\partial (U_k + v_k)(P + \beta)}{\partial x_k} + \mu (U_i + v_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial (U_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (U_k + v_k)}{\partial x_i} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

- K становится *средней* кинетической турбулентной энергией.

• Преобразование левой части:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho (U_k + v_k)(U_k + v_k) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \rho (U_k + v_k)(U_i + v_i)(U_i + v_i) \right\rangle = \\
 & = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\rho}{2} \langle U_k U_k \rangle + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\rho}{2} \langle v_k v_k \rangle + \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \frac{\rho}{2} (U_k U_i U_i + v_k v_i v_i + U_k v_i v_i + 2v_k v_i U_i) \right\rangle = \\
 & = \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \rho U_k U_i U_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho U_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho v_k v_i U_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\
 & = \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \left(\frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k \rho k}{\partial x_k} + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle \right)
 \end{aligned}$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _6: осреднение

- Преобразование правой части (полагаем вязкость постоянной):

$$\begin{aligned}
 & \left\langle -\frac{\partial(U_k + v_k)(P + \beta)}{\partial x_k} + \mu(U_i + v_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(U_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(U_k + v_k)}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle + \mu U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \mu \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle = \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i v_i}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\
 & = -\frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_k}
 \end{aligned}$$

- Здесь учтено, что

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _7: отделение ТКЭ

- После преобразования – осреднённое уравнение для всей к.э. $K = \langle K \rangle + k$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial U_k \rho k}{\partial x_k} + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_k v_i v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\ & = - \frac{\partial U_k P}{\partial x_k} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \end{aligned}$$

- Вычитаем из него почленно уравнение для средней к.э. потока $\langle K \rangle$:

$$\frac{\partial \langle K \rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_k \langle K \rangle}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} = - \frac{\partial P U_i}{\partial x_i} + \mu U_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}$$

- Получим "осреднённое уравнение" или "уравнение для средней" ТКЭ:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial U_k \rho k}{\partial x_k} - U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\rho}{2} \left\langle \frac{\partial v_k v_i v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\ & = - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _8: преобразование

- С учётом соотношения (r_{ik} – тензор напряжений Рейнольдса):

$$-U_i \frac{\partial \rho \langle v_k v_i \rangle}{\partial x_k} + \left\langle \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle -U_i \frac{\partial \rho v_k v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho U_i v_k v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \rho v_k v_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\rangle = - \left\langle r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\rangle$$

- Получим уравнение для турбулентной кин. энергии k :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial U_k \rho k}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left(\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} - \frac{\rho}{2} \left\langle \frac{\partial v_k v_i v_i}{\partial x_k} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_k \beta}{\partial x_k} \right\rangle \right)$$

- или

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k k}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \langle \rho v_k v_i v_i \rangle - \langle v_k \beta \rangle \right)$$

изменение

порождение
потоком

молекулярная
"диффузия"

"диффузия"

транспорт

диссипация
в потоке

Уравнение для ТКЭ в RANS-модели _9: интерпретация

- **Физическая интерпретация и преобразование** «диффузионного» транспорта ТКЭ пульсациями: малость (DNS-расчёты) пульсаций давления β ; приведение к виду переноса ТКЭ потоком – и полагается пропорциональность градиенту :

$$\frac{1}{2} \langle \rho v_k v_i v_i \rangle + \langle v_k \beta \rangle \approx \frac{1}{2} \langle \rho v_k v_i v_i \rangle \approx \langle \rho v_k \rangle \frac{1}{2} \langle v_i v_i \rangle = \langle \rho v_k \rangle \kappa \equiv - \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_k}$$

- **Определим скорость диссипации ТКЭ ε :**

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \nu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle$$

- **Итак, уравнение для ТКЭ :**

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \kappa}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} \right)$$

изменение

порождение
потоком

"диффузия"

транспорт

диссипация

(Давление сюда не вошло – почему?)

Физический смысл достигнутого: "энергетическое" замыкание модели турб.

- Кин. энергия потока – неинтересна, если *точно* известны скорости. Но известны лишь средние, и ТКЭ – "мера турбулизации" – выступает на первый план в *осреднённом* описании. Уравнение для неё получено –
- **Выделение** энергии пульсаций из полной кинетической энергии: **ур-е ТКЭ**;
- **"Каскад"**: передача энергии движения от крупных к мелким вихрям, диссипация – генерация ТКЭ **к за счёт подпитки извне, перекачка в мелкие вихри, диссипация ε** ;

Это необходимые элементы описания в терминах энергии: (κ) k , ε (или ω)

- **"Скорость диссипации ТКЭ"**: ε и $\omega = \varepsilon/k$ (*относительная скор. диссипации*);
- k и ε (или ω) – функции координат: "пространство скоростей" в каждой точке (частице) потока, оно им формируется и переносится ...
- Интерпретация ω (А.Н.Колмогоров): это – сред. частота пульсаций, она связана с вихревым движением, ω^2 – средняя кин. энергия вихря.

Нужно ещё одно уравнение. Для скорости диссипации ТКЭ

- Физический смысл **скорости диссипации ТКЭ** понятен – есть генерация и транспорт ТКЭ – есть и переход в тепло (исчезновение) ТКЭ. Сток ТКЭ связан с ТКЭ, но не вполне определён – нужно ещё уравнение – какое?
- Уравнение, видимо, должно быть аналогичным уравнению для ТКЭ, т.е. –
- Ещё раз – из чего состоит уравнение транспорта потоком:

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \kappa}{\partial x_k} = r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_k}$$

изменение

транспорт

порождение ПОТОКОМ

диссипация

диффузия

Другие источники: плавучесть, ...

Формулировка дополнительного уравнения – определение оставшегося независимого параметра модели (диссипация) – это **две задачи**:

- 1) В предположении слабой зависимости развитой турбулентности от свойств жидкости – вывод соотношений между параметрами и –
- 2) Ещё уравнение транспортно-го типа для ε или ω .

- О получении выражения (уравнения) для диссипации ТКЭ и других : (Wilcox) ... “drastic surgery” ... – получаемых уравнений моментов etc.
- При получении выражений руководствуемся принципом:
... to avoid modeling the differential equations rather than the physics of turbulence... (см. с.105)

- Ранее было соотношение

$$\mu_T \sim \langle \rho \rangle \kappa^{1/2} l_{MIX}$$

- Есть уравнение для k и в него вошло ε . Анализ размерностей:

If both properties are assumed to be strictly functions of the turbulence independent of natural fluid properties such as molecular viscosity, then **purely dimensional arguments** [Taylor (1935)] show that

$$\mu_T \sim \kappa^2 / \varepsilon, \quad l_{MIX} \sim \kappa^{3/2} / \varepsilon$$

- И переходим к уравнению для ε : конвект. диффузия, источники ...
- Исторически сначала было предложено уравнение для **относительной скорости (мощности) диссипации ТКЭ – относительно k :**

$$\omega = \varepsilon / \kappa$$

k - ω модель турбулентности

- **Уравнение для ω** (исторически 1-я модель Т. – А.Н.Колмогоров, 1941):

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} = -\xi \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \eta \mu_T \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

- получено «из общих соображений»; записано для ω , не для ω^2 (энстрофии); сток ε пропорционален ω^2 : замедление и исчезновение вращения в потоке;
- позже (Wilcox, ...) были добавлены *production term* и молекуляр. вязкость:

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} = \alpha \frac{\omega}{\kappa} r_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \xi \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mu + \eta \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

- **порождение (production) ω от основного потока** – диссипация k растёт на малых масштабах – следствие каскадной передачи ТКЭ от больших вихрей
- **молекулярная вязкость** – для постановки гран. условий у стенки в вязком подслое – где турбулентность нулевая
- **В таком виде – близко к стандартной модели k - ω**
- **Определение коэффициентов модели** – из расчётов модельных задач, DNS-расчётов – отдельная большая задача ...

- Система уравнений с выражениями для источников и коэффициентов:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k$$

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega}$$

G_k , G_ω – источник за счёт градиента средней скорости

Y – dissipation due to turbulence

S_ω , S_k – пользовательские источники

(см. Fluent manual ...)

$k - \varepsilon$ модель турбулентности – уравнение для ε ?

- **Уравнения:** The exact equation for ε is derived by taking the following moment of the Navier-Stokes equation.

$$\overline{2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathcal{N}(u_i)]} = 0$$

where $\mathcal{N}(u_i)$ is the Navier-Stokes operator defined in Equation (2.26).

- After a considerable amount of algebra, the following equation for ε results:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\mu \left[\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}} + \overline{u'_{k,i} u'_{k,j}} \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2\mu \overline{u'_k u'_{i,j}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \\ & - 2\mu \overline{u'_{i,k} u'_{i,m} u'_{k,m}} - 2\mu \nu \overline{u'_{i,km} u'_{i,km}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \mu \overline{u'_j u'_{i,m} u'_{i,m}} - 2\nu \overline{p'_{,m} u'_{j,m}} \right] \end{aligned}$$

- **Слагаемые:**
- **Production of Dissipation**
- **Dissipation of Dissipation**
- and the sum of Molecular Diffusion of Dissipation and Turbulent Transport of Dissipation, respectively.

These correlations are essentially impossible to measure with any degree of accuracy → “drastic surgery” ...

Система уравнений вместе с определениями источников и фиксированным набором коэффициентов – это «Standard k - ϵ model»

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon$$

k – здесь уже – ТКЭ;

G_k – источник за счёт градиента средней скорости;

G_b – источник за счёт архимедовых сил (важно для конвективных течений);

S_ϵ , S_k – пользовательские источники;

$G_{2\epsilon}$ и др. – коэффициенты ;

(см. FLUENT manual ...)

...
*Каким ты был, таким ты и остался,
Но ты мне дорог и такой ...*

М. Исаковский, И. Дунаевский, песня из к/ф
"Кубанские казаки"

RANS and CFD: истоки коммерческой вычислительной гидродинамики

(Wilcox):

1. **flows with sudden changes in mean strain rate;** (ступенька, диффузор ...)
2. **flow over curved surfaces;** (гибы)
3. **flow in ducts with secondary motions;** (канал прямоугольного сечения)
4. **flow in rotating and stratified fluids;** (вращающаяся труба, ...)
5. **three-dimensional flows;** (разные ...)
6. **flows with boundary-layer separation** (отрыв погран. слоя ...)
7. **затопленная осесимметричная струя** (отклонение от симметричности...)

Но – 2-параметрические RANS-модели – это:

“The working horses of the engineering calculations”

-
- **Вычислительная гидродинамика: Computational Fluid Dynamics – CFD**
 - **Первый коммерческий пакет на основе k-ε модели: Phoenix (70-е гг.)**
 - **Руководитель работ – B. Spalding: “The father of CFD”**

Origins

With the advent of fast, digital computers in the 1960s, it became possible to attempt the numerical solution of the **Navier-Stokes** equations, the governing equations of fluid dynamics.

In the early days, the general policy was to write **specific codes for specific tasks**, and universities, research laboratories and industry followed this trend.

The result was a **myriad of special-purpose codes**, with each code almost exclusively operated by the person, or group, who wrote it. Documentation was usually poor, and often non-existent. There was almost always one key, central person, who was the sole source of knowledge of the software.

In 1974, Prof. D. B. Spalding of Imperial College, London founded a spin-off company called **CHAM** (Concentration, Heat And Momentum). Initially, CHAM followed the general trend of special-purpose software, but in 1980 adopted a **single-code policy**, with a central, robust solver, and then concentrated on model development. This new code system, **PHOENICS**, could be regarded as the first, genuinely multi-purpose CFD code, and a model for those that followed.

Exploitation of the **commercial potential** of this concept also began.

For these reasons, Brian Spalding is often referred to as the “**Father of CFD**”



The new era of CFD: led by PHOENICS



Modular design: **central solver** **pre-processor (mesh generator)** **post-processor (graphical display of results)** and modules to link in, as needed for the application.

This strategy is now followed by all the main commercial CFD vendors.

What is CFD?

Universal adage of science and technology

Everyone believes an experiment...except the guy who ran it
And no one believes a calculation...except the guy who made it.

What actually is CFD?

And can it change these beliefs?

Various Definitions

Officially stands for...	Computational Fluid Dynamics	
Is accused of being...	Colourful Fluid Dynamics	
Is often (ab)used as...	Colours For Directors	
Or worse...	Colourful Fantasy Dreams	
Begins to be...	Credible Fluid Dynamics	
But is not always...	Cost-effective Fluid Dynamics	
Could add one more...	Commercial Fluid Dynamics	WHY?

CFD Software Packages

Commercial

FLUENT originally developed by Create Inc., USA, Sheffield Univ., UK and FDI, Chicago, USA
acquired by ANSYS Inc. in 2006

CFX originally developed by AEA Technology, Harwell, UK
acquired by ANSYS Inc. in 2003

STAR-CD } originally developed at Imperial College, London, then by Computational Dynamics Ltd,
STAR-CCM } marketed by the CD-ADAPCO group

PHOENICS originally developed at Imperial College, London, then by CHAM Ltd

Freeware

OpenFOAM originally developed at Imperial College, London, then by Nabla Ltd, but then made freely
available by OpenCFD in 2004. Unique feature: source code access (written in C++)

Отступление: о сетках и сеточных примитивах

Структурные элементы конечно-разностной (контрольно-объёмной) или конечно-элементной модели расчётной области (см. [отд. файл](#))

- 1. Дано – система уравнений в частных производных на области Ω**
- 2. Задана схема дискретизации – сведение ч.д.у. к системе алг. ур-ий**
- 3. Область Ω разбивается на дискретные элементы (ячейки) – сетка.**
Задание гран. условий, моделирование физически сложных задач etc.
требуют детализации сеточного разбиения и формирования минимальных представлений о сетках и методе дискретизации:
- 4. О методе контрольных объёмов в CFD.**

(см. отдельный файл)

*Die erste Kolonne marschiert,
Die zweite Kolonne marschiert ...*

Л.Н. Толстой, Война и мир

Решение основной системы уравнений в CFD-коде

Сжимаемая жидкость, явная схема: density-based solver

- совместно решаются все ур-я, кроме турбулентности (и силовых)

Сжимаемая/несжимаемая – неявная: pressure-based solver –

В цикле по итерациям:

А. Уравнения потока (разные методы)

Б. Остальные уравнения:

- турбулентность
- энергия
- концентрация примеси
- etc.

**В. Подстановки вычисленного в уравнения потока (турб. вязкость, ...)
– продолжение/выход из цикла**

Уравнения движения (flow equations)

- Общая форма

- Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

- Уравнение Навье-Стокса (постоянная вязкость)

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\beta + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_j + G_i$$

- Несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$) без источников массы:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + g_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

- Граничные условия ...

- Уравнения состояния ...

$$p = p(\rho), p = p(T, \rho), \dots$$

ρ – плотность, p – давление, u_i – компоненты скорости, g_i – плотность внешних сил, μ – динамическая вязкость, тензор напряжений: $\sigma_{ik} = -1/3 p \delta_{ik} + s_{ik}$

Решение уравнений движения в CFD-коде

- **Решение для сжимаемой жидкости** : плотность через давление подставляется из уравнения состояния, имеем четыре уравнения для 4-х неизвестных, давление входит во все. Решение системы: а)методом расщепления (поочерёдно, по уравнению) или б)совместно ...

- **В случае несжимаемой жидкости** $\rho = \text{const}$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

– здесь только скорость

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + G_i$$

– здесь и давление, и скорость

- **Вводится уравнение для давления** – взяв дивергенцию от уравнения движения:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + G_i \right) =$$

(используя

$$H = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} G_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} G_i .$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k}$$

– в правой части

– в левой части

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k}$$

– уравнение для

Density-based – сжимаемая жидкость, обычно – околосвуковые скорости;

Сопряжённое решение уравнений движения и энергии :

– сразу вся система из 4+1 уравнений (ур-е энергии – если в УрС входит T)

По времени:

- *явный* (система уравнений газодинамики) – условие Куранта !
- *неявный* (неявная схема интегрирования по времени);
- *стационарный*.

Pressure-based – как несжимаемая, так и сжимаемая жидкость (малые скорости, переменное давление – например, вдув газа в замк. сосуд)

Решение уравнений движения – через уравнение давления:

- *сопряжённый (coupled)*
- *расщепления (segregated)*

По времени:

- *всегда неявная аппроксимация;*
- *(не)стационарный процесс (обычно $M \ll 1$, иначе – погрешности)*

1. Метод расщепления (поочерёдное решение уравнений)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial^2 (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k}$$

– Уравнение для давления: решается

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + G_i$$

– Компоненты скорости – определяются

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

– в уравнение непрерывности скорости подставляются для проверки выполнения условия $\text{div } \mathbf{u} = 0$

Проблема: $\text{div } \mathbf{u} \neq 0$: скорости, определяемые из НС при вычисленном давлении, не удовлетворяют уравнению непрерывности, степень отклонения вычисляется.

Решение – коррекция: по степени отклонения вычисляются поправки к давлению, подставляются в ур-е движения, вычисляются новые скорости и далее итерационно – процедура **pressure-velocity coupling**.

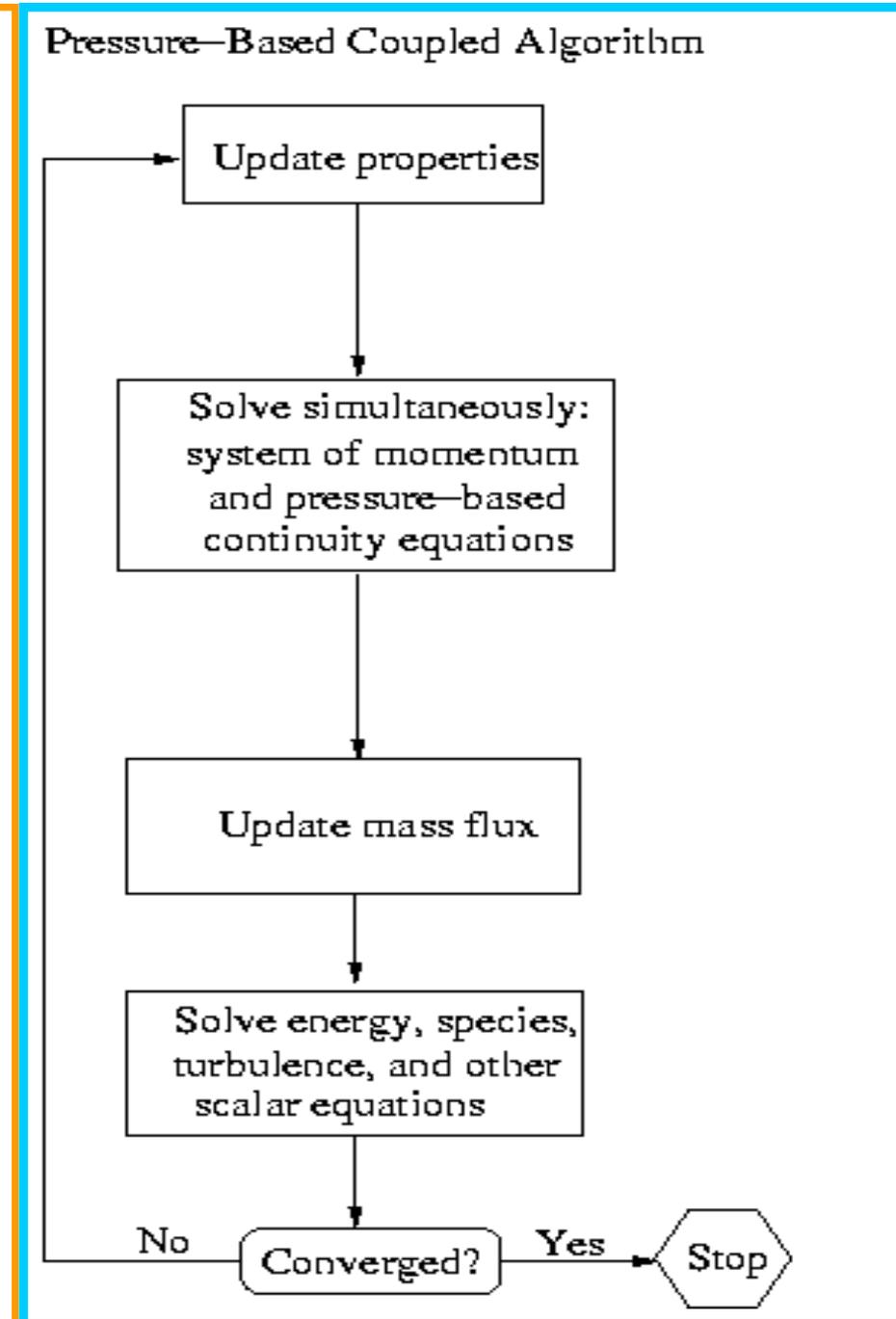
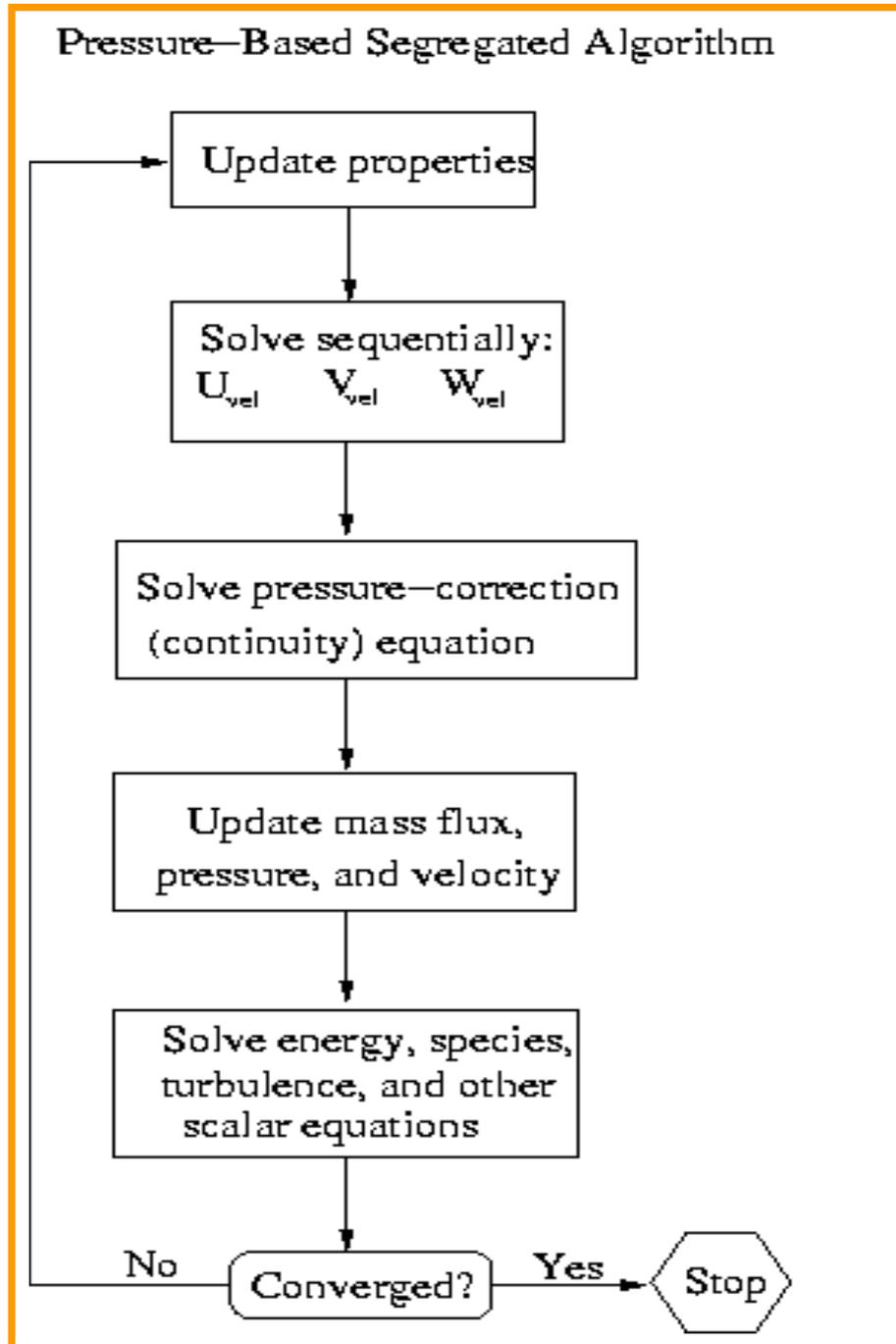
Методы pressure-velocity coupling: **SIMPLE, SIMPLEC, PISO, их версии.**

SIMPLE – Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations

PISO – Pressure Implicit with Splitting of Operators

2. Coupled solution – не поочерёдное, а совместное решение уравнений давления и импульса в одной системе (4-кратный размер алгебраической системы)

Pressure-based алгоритм решения уравнений движения в Fluent



Внутренние и внешние итерации

- 1) итерации по давлению (внутренние) на каждой внешней итерации
- 2) внешняя итерация
- 3) шаги по времени в нестационарных задачах

(демонстрация итераций *etc.* – в расчёте – *TUI: solve... advanced ... verbose=2*)

На что в основном тратится время в расчёте? – обычно – **на уравнение давления** (*segregated solver*) **или динамики жидкости** (*coupled*): делается много **внутренних** итераций. Остальные уравнения: для турбулентных величин, энергии, состава *etc.* часто решаются гораздо быстрее.

Это следует иметь в виду при выборе решателей, моделей *etc.* для нестационарных задач (много шагов по времени) – *если данный набор опций допускает большой шаг по времени* – остальное часто можно простить (лишнее уравнение, дополнительная оперативная память ...)

Выбор схемы дискретизации транспортных ур-й (pressure-based solver!)

- а) 1-й порядок – монотонная сходимость, но – численная диффузия
- б) 2-й порядок (при наличии нелинейного конв. слагаемого – условно 2-й ...) – точнее, фактически – только при 2-м порядке можно рассчитывать на точность, но возможна немонотонная сходимость – **монотонность** – нужна!
- в) дальнейшие уточнения: "high-order schemes"

Схема дискретизации уравнения давления :

- см. меню ...
- существенно – учёт архимедовых сил – пригодны две – Body Force weighted и PRESTO. Чаще всего – PRESTO (личный опыт, мнение других)

Дискретизация по времени (нестационарные задачи) – обычно достаточно 1-го порядка ... 2-й порядок: не сильно увеличивает точность (может улучшить или ухудшить сходимость – в сложных задачах надо пробовать)

Способы вычисления градиентов (обычно – линейная аппроксимация, но есть и другие) – см. меню CFD-кода

Начальные, граничные, operational условия, источники

Начальные условия – инициализация: см. меню FLUENT

Operational conditions: см. список задаваемого в меню FLUENT

Гидродинамика задаётся границами потока – граничные условия :
"просто условия" и "пристеночные функции"

А. "Просто условия" – могут быть вычисляемые, распределённые etc. – на входе-выходе или у стенки (wall)

Б. Пристеночные функции – аппроксимация эффектов турбулентности – разные способы, разные модели ... (см. далее – пристеночная турбулентность)

Источники: постоянные (включая нулевые), пользовательские (UDF)

Граничные и operational условия (1)

Формальная постановка г.у. – уравнения потока – второго порядка

- Уравнение неразрывности – баланс массы
– нужно условие на «вход» массы – расход

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = m (= 0)$$

- Ур-е баланс импульса используется в преобразованном виде

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + G_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \left(\mu_2 + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u_j + G_i$$

изменение

транспорт

генерация в потоке: внешняя сила (г.у.: напор и трение о стенку) уравновешены вязким трением в потоке

источник - внешний

- условие на вход-выход - расход (скорость), давление или градиент давления – условия 1-го или 2-го рода (в мод. турбулентности – и 3-го ...)
- условия на стенках (по скорости) – трение или скольжение – 1-го рода

Гран. условия для других величин (T, Y_i, \dots) извлекаются из уравнений для них и постановки задачи

Граничные и operational условия (2)

Пример: уравнение теплопроводности – гармония математики и физического смысла (*пример из меню*) – гран. условия в уравнениях диффузионного типа.

В случае течения жидкости – не одно уравнение, а несколько связанных. Требования корректности гран. условий легче понять с разбором их физического смысла.

Пример: задание г.у. в задаче о течение в прямой трубе. Движение вызвано силами, в стационарном состоянии – баланс сил: напор (градиент давления) вызывает движение, рост скорости ограничен ростом трения – в потоке и на стенке.

- Вход в трубу (в канал) – условие на скорость (расход) – г.у. 1-го рода;
- Выход – давление – 1-го рода (скорость определена сохранением массы);
- Давление на входе – уравнивается полным трением – вычисляется!

Часть условий в FLUENT задаётся по постановке задачи (гидростат. давление), частично – вычисляемые (на стенках: т.н. пристеночные функции).

Остальное – задаётся с контролем переопределения – диагностируются неточности ввода, часть комбинаций отсутствует в меню, много имитаторов источников (вент. etc.)

Граничные и operational условия (3)

Давление – относительно фонового (для уменьшения ошибок округления)

$$P_{abs} = P_{op} + P_{gauge}$$

Сжимаемый газ: $p_{op}=0$, $\rho_{op}=0$! Иначе – возможны ошибки и неточности

(В гидростатике $\rho g(z-z_0)$ также отнимается от основного давления и на картинке давления по умолчанию строится разность давлений – вид странноватый)

Скорость –

На входе/выходе : компоненты вектора ... – для напорных течений

У стенки :

Скорость: нормальные и касательные: "непротекание", "нескольжение" (no slip)

Температура

Граничные условия 1-, 2-, 3-го рода и по излучению «на бесконечность»

По умолчанию – нулевой поток тепла

Концентрация и другие скаляры, переносимые потоком

Аналогично температуре, хотя условия 2-3-го рода для уравнения диффузии в меню FLUENT отсутствуют (для просто скаляра есть условие 2-го рода)

Г.у. по умолчанию – нулевой поток – “zero gradient” или нулевое значение

Условия на входе/выходе (inlet/outlet)

По скорости – понятно ...

По турбулентности – возможно сведение к легко оцениваемым величинам

Turbulence Length Scale L & l_{mix} : $l_{mix} \sim 0,07L$

Intensity:
(fully-developed duct flow of relevant size L)

$$I_{turb} = \frac{\langle \delta u \rangle}{u_m} \sim 0,16 \text{Re}^{-1/8}$$

Hydraulic Diameter :

$$D_H = 4(\text{Area})/(\text{perimeter})$$

Estimating Turbulent Kinetic Energy from Turbulence Intensity

$$k = \frac{3}{2}(u_{avg}I)^2$$

Estimating Turbulent Dissipation Rate from a Length Scale

$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

Условия на стенке в турбулентном потоке

(для скоростей и основных параметров модели турбулентности):

wall functions – в рамках имеющегося в данной версии для данной модели

*Гладко писано в бумаге,
Да забыли про овраги, как по ним ходить?*

Л.Н.Толстой, Песня (1855 г.)

Анизотропия потока: пристеночная турбулентность

Основные объекты экспериментирования по пристеночной турбулентности – пластины и каналы (труба)

- **Структура потока в пристеночной области**
- **Количественное описание** – параметры потока, зависимости
- **Численное моделирование** – пристеночные функции (wall functions)
- **Расчётный пример** – "benchmark" – течение в прямой трубе
- **Турбулентные величины** – сравнение с экспериментом

Строение потока в окрестности стенки (см. у Хинце)

Подобласти в зависимости от расстояния до стенки: y или $y^+ = yu_{FR}/\nu$:

1. Вязкий подслой: напряжение постоянно по высоте, вязкий закон:

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

скорость пропорциональна
расстоянию до стенки ($u^+ = y^+$):

$$u_{FR} u^+ \equiv u_x \sim \frac{\tau}{\mu} y = \frac{\rho u_{FR}^2}{\mu} y = \frac{u_{FR}^2}{\nu} y = u_{FR} \frac{u_{FR} y}{\nu} = u_{FR} y^+$$

"скорость трения", "динамическая скорость" (в потоке) –

$$u_{FR} = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2}$$

2. Турбулентный погран. слой – область пристеночной турбулентности – здесь турбулентная вязкость пропорциональна расстоянию: $\mu_T = \mu_T(y^+) = \kappa y^+$ - рост турбулентного трения от стенки. Отсюда – уравнение логарифмического закона:

$$const = \tau = \mu_T(y^+) \frac{\partial u_x}{\partial y} = \kappa y \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \text{или –}$$

$$\frac{const}{\kappa y} = \frac{du_x}{dy} \quad \text{или –}$$

$$\frac{1}{\kappa y^+} = \frac{1}{u_{FR}} \frac{du_x}{dy^+}$$

– универсальный закон стенки:
($\kappa=0,39$ - постоянная Кармана)

$$u^+ = u_x / u_{FR} = (\ln y^+) / \kappa + B = (\ln E y^+) / \kappa$$

3. Основной поток (в канале – ядро потока) – в зависимости от геометрии ...

Показатель – безразмерное расстояние до стенки – $y^+ = yu_{FR}/\nu$

Особенности потока у стенки (см. у Хинце) _1

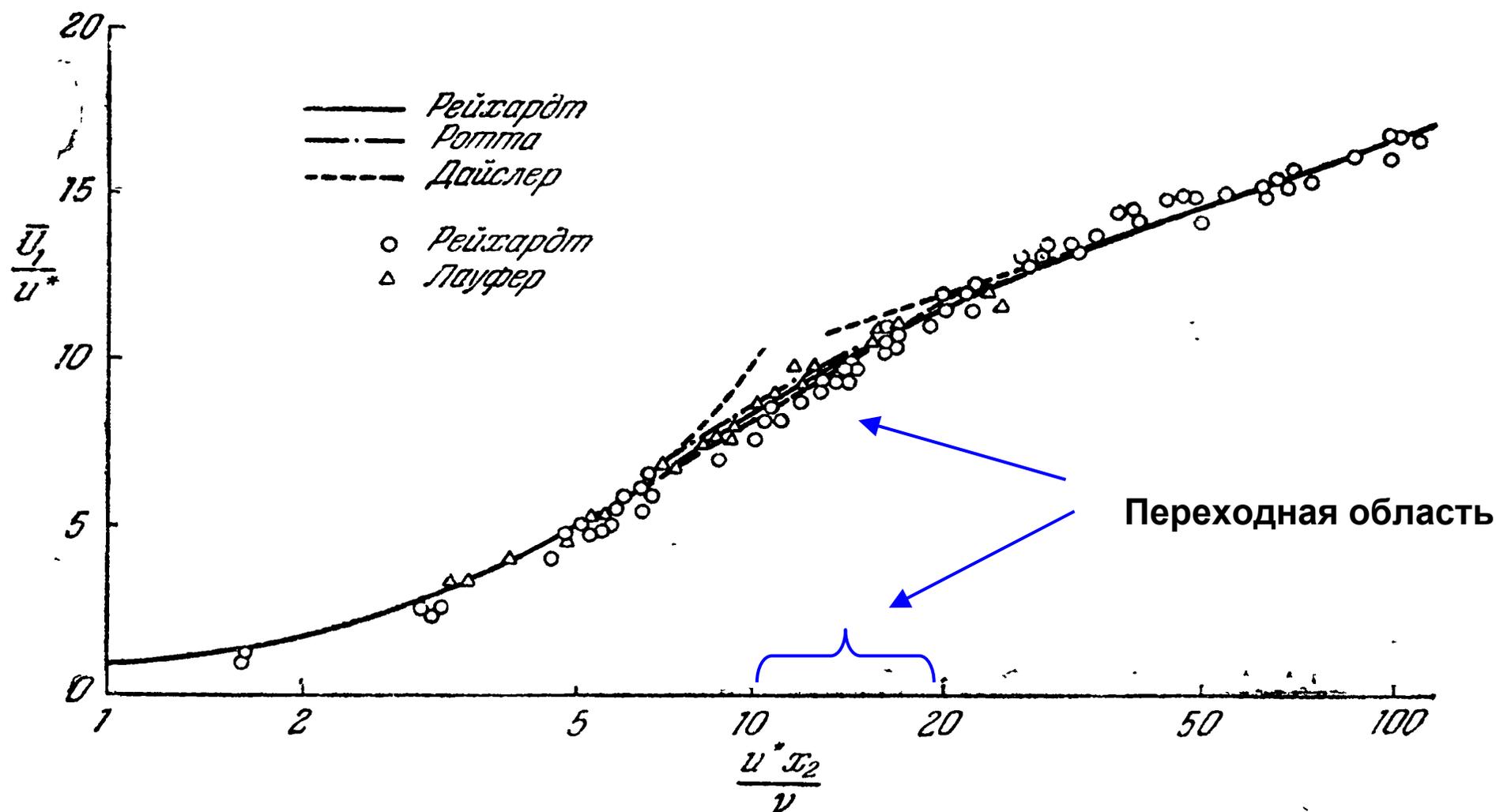


Рис. 7.3. Сравнение теоретических распределений скорости в переходной области турбулентного пограничного слоя с экспериментальными данными Рейхардта [12] для течения в канале и Лауфера [41] для течения в трубе.

Профиль продольной скорости по высоте от границы $x_2 = y$ при $y^+ < 100$.

Особенности потока у стенки (см. у Хинце) _2

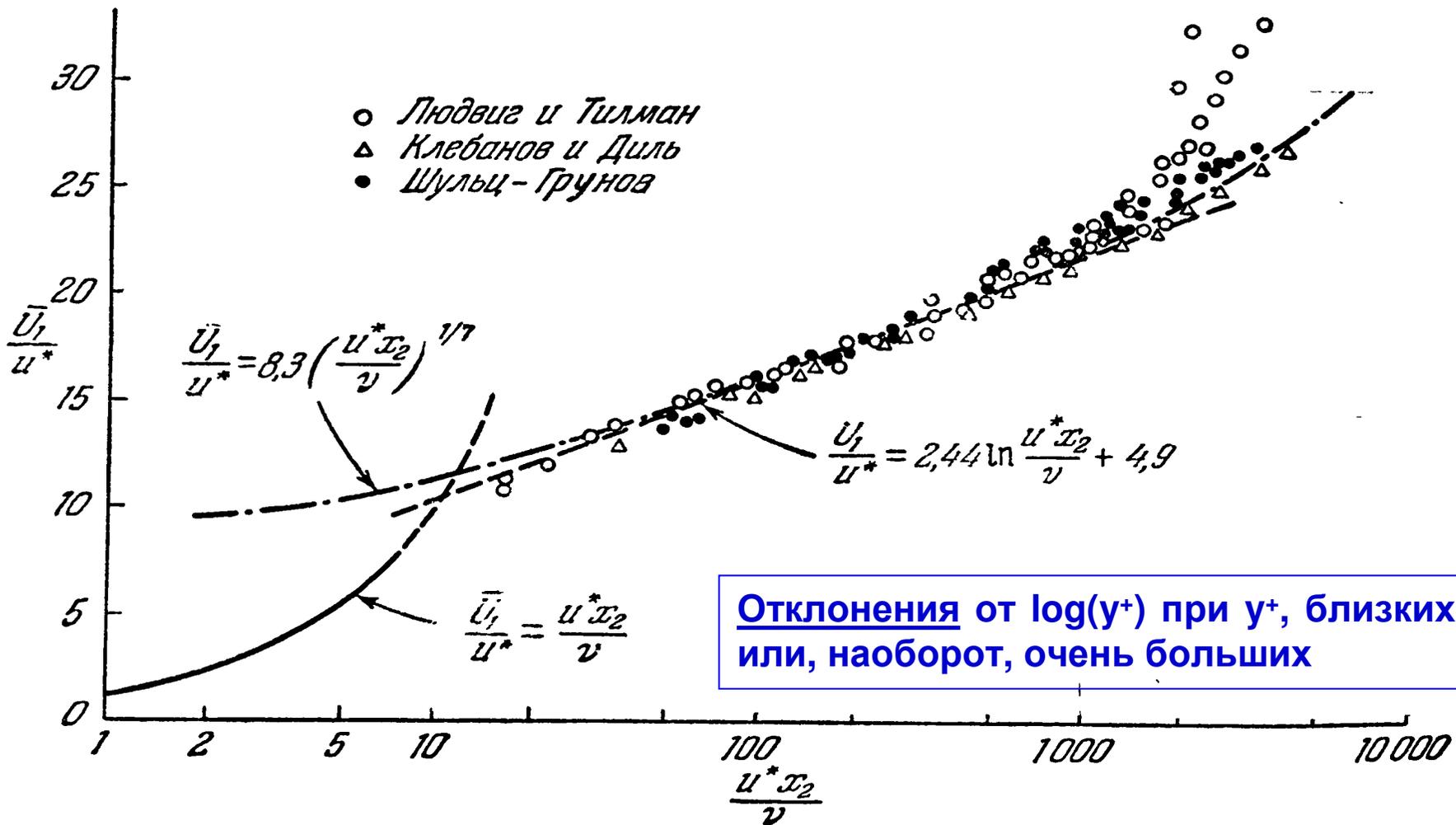


Рис. 7.2. Распределение осредненной скорости вблизи гладкой стенки.

Профиль продольной скорости по высоте от границы $x_2=y$ при $y^+ < 10000$.

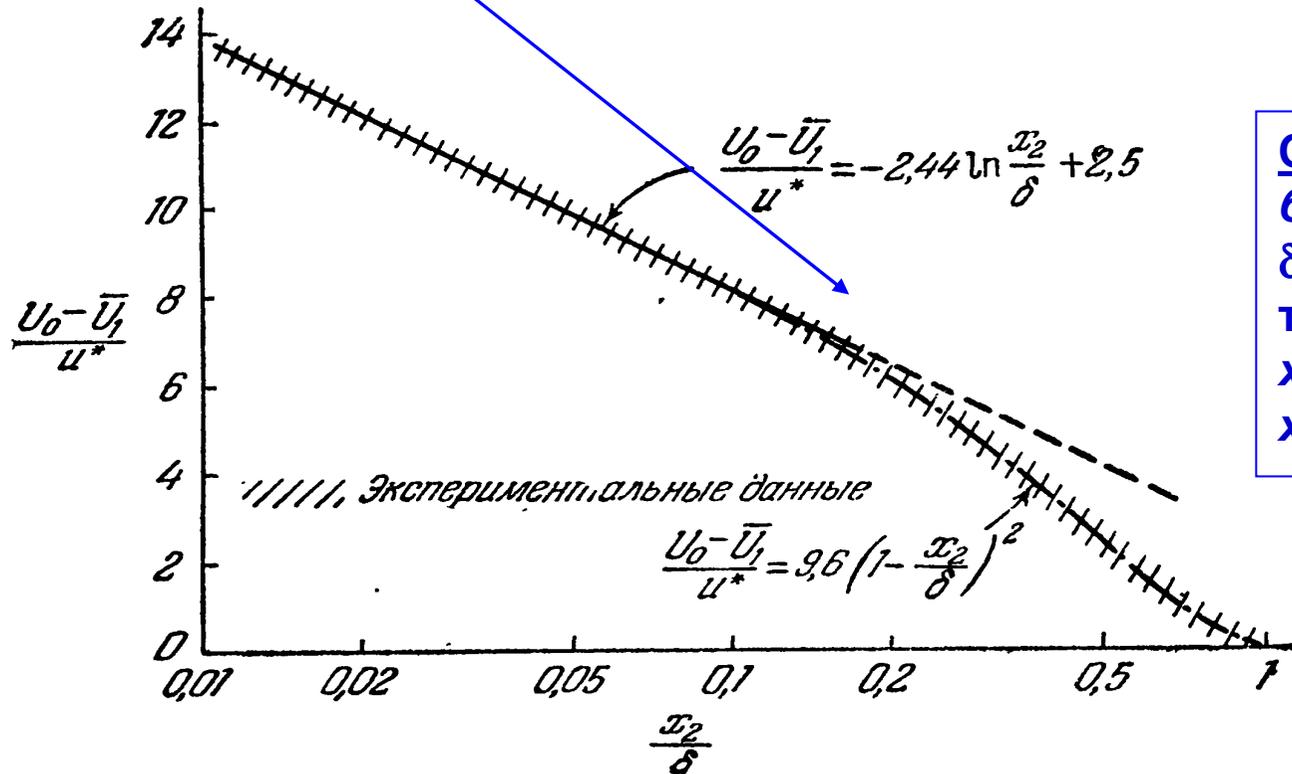
В вязком подслое – линейный закон для скорости

В прилегающем турбулентном слое – логарифмический (закон "1/7" по всей трубе)

Особенности потока у стенки (см. у Хинце) _3

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = -2,44 \ln \frac{x_2}{\delta} + 2,5. \quad (7.67)$$

Значение $x_2/\delta \approx 0,15$, выше которого это логарифмическое распределение скорости отклоняется от действительного, соответствует



Отклонения от $\log(y^+)$ при больших y^+ ,
 δ - эффектив. толщина турбул. погран. слоя
 x_1 - это x
 x_2 - это y

Рис. 7.4. Распределение скорости во внешней части турбулентного пограничного слоя в полулогарифмическом масштабе [21].

приближенному значению $u^* x_2 / \nu = 750$ (см. рис. 7.2). Эта вели-

График «избыточной» продольной скорости $u(\delta)$ - $u(y)$ в погран. слое

CFD-моделирование стенки: wall functions _1

В экспериментах с пластинами: log закон выполняется, начиная с $y^+=30$

С неплохой точностью можно брать (см. выше) $y^+(1)=15-20...$

Критерий в CFD-кодах $y^*=11,63$ – решение уравнения $y^* = \ln(Ey^*)/\kappa$

!! в FLUENT – для удобства вычислений y^* (y-star) вместо y^+ (y-plus)!!

Задание граничных условий (скорость) в уравнениях движения и в уравнениях турбулентности – на этой основе.

Надо – задать значения на границе области с учётом турбулентного погран. слоя и вязкого подслоя. **Случаи:**

- а) граничная ячейка** – в области турбулентности
- б) граничная ячейка** – в области вязкого подслоя

В обоих случаях находится сток импульса в пристеночной ячейке – сила трения и по ней – скорость трения или связанные с ней величины

Последовательность (в FLUENT делают чуть по-другому):

- 1) в граничной ячейке решается алгебр. уравнение относительно u_{FR} – по U_P и y_P на итерации (FLUENT: можно также выразить её через ТКЭ: y^*)**

$$U_P = \frac{u_{FR}}{\kappa} \left(\ln \frac{u_{FR} y_P}{\nu} + \ln E \right)$$

- 2) Определяется новое $y^+_{+}=y^+(1)$ для пристеночного узла и по критерию $y^*=11,63$ решается, где находится граничная ячейка – случай а) или случай б)**

Случай а): вязкий подслой в 1-й ячейке – в пристеночной ячейке вводится сток в уравнение продольной (у стенки) компоненты импульса – *турбулентное трение* [Versteeg]:

$$F_S = -\tau_w A_{cell} = -\frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} u_P}{u^+} A_{cell} = -\left(\frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} A_{cell}}{u^+} \right) u_P$$

Случай б): 1-я ячейка – в вязком подслое (мелкая сетка) – условие ламинарного потока у стенки: в уравнении продольной компоненты u_x :

$$u_x(0)=0 \text{ (или } \partial u_x / \partial y = 0 \text{ – без трения) , } u_y=0. \text{ (ср. – г.у. стенка-жидкость-газ?)}$$

Но это грубовато. При мелкой сетке моделирование переходной области можно уточнить – применить дополнительную модель перехода к логарифм. закону в области турб. погранслоя – *enhanced wall treatment* (k-e model), ****-function* (k-w model) – см. меню моделей турбулентности ...

Таким образом, в расчёте следует заранее узнать – оценить или вычислить (запустить пробный расчёт) y^* на границах и решить, какую пристеночную функцию выбрать (замечание относительно *enhanced wall treatment* ...)

Далее – определяются величины, описывающие пристеночную турбулентность в других уравнениях и гран. условиях для них:

- для ТКЭ
 - для скорости диссипации
 - для температуры
- и в др. скалярных уравнениях
-

Существенно!

Рассматривается развитая, установившаяся (вдоль стенки и по времени) турбулентность!

Идеальный случай – длинный прямой круглый канал или пластина при $Re > \sim 10000$

В противном случае – возможны отклонения от описанной стандартной картины.

Этапы числ. решения

- ✓ Постановка задачи и цели численного расчёта (см. выше и ниже)
- ✓ Создание геометрической модели и её разбиение (готовая сетка)
- 1. Выбор процедуры решения, параметров расчёта и физических моделей
- 2. Численное решение – контроль сходимости и решения
- 3. Визуализация, проверка, сохранение решения
- 4. Доработка модели (другие опции ...), варианты расчёты

Расчёт при варьируемых параметрах:

Модели турбулентности – RANS ...

Пристеночные функции – стандартные и –

Enhanced wall treatment – улучшенное описание пристеночной области

Далее – манипуляции с сеткой:

Влияние входного участка (см. у Хинце) – заметно? – для его уменьшения –
растяжение сетки

Adaptation – *измельчение сетки* – проверка качества разбиения

Цели расчёта –

- **Получить с заданной точностью стационарное решение, проанализировать на предмет соответствия экспериментам для длинной трубы**
- **Рассмотреть причины отклонений (входной участок, сетка, режим и др.)**
- **Сравнить влияние различных опций :**
 - **при различных Re (высокорейнольдсовы и низкорейнольдсовы)**
 - **на разных сетках**
 - **при разных гран. условиях (*wall functions*)**
- **Для этого – построить графики, обезразмерить, сравнить**
- **Возможно сравнения по ряду величин – представлены ниже**

Расчёт течения в круглой трубе _3 : варианты вх. данных

No	Turbulence	Re	Вход. условия	Name
1	k-e standard, standard	small / large	однородно	
2	k-e standard, nonequilibrium	small / large	однородно	
3	k-e realizable, nonequilibrium	small / large	однородно	
4	k-e realizable, enhanced	small / large	однородно	
5	k-e realizable, adaptation	small / large	однородно	
6	k-w standard	small / large	однородно	
7	k-w SST	small / large	однородно	
8	Spalart-Almaras	small / large	однородно	
9	RSM	small / large	однородно	

Что рассчитывается численно и служит результатом расчёта

Конфигурация – длинная труба; входная скорость – равномерна по радиусу; участок установления и участок развитой турбулентности

Случаи:

- а) Невысокие Re – проверить работу опций гран. условий модели турбулентности (standard, enhanced wall treatment). Сравнение по радиальному распределению скорости (лог. профиль) в области установившегося течения – результатов расчётов и аналитического выражения $(1/k \ln(y^+) + C)$.
- б) Высокие Re – сравнение моделей $k-w$, $k-e$ (RNG, Realizable) .
- в) Расчёты для нескольких значений входной скорости.

Результаты:

- На участке развитой турбулентности – $\log(y^*)$, зависимость давления от расстояния вдоль длины трубы (2 варианта – вариация модели турб. и пристен. функций).
- Сравнить перепад давления с получаемым по формуле Блазиуса – зависимость от входной скорости – по нескольким вариантам.
- Другие величины ...

Варианты для разных авторов:

- Разные диаметры (оценка числа Re !)
- Воздух или вода (оценка числа Re !)
- Разные модели турбулентности

Оценка касательного напряжения

на участке развитой турбулентности –
поток импульса на ед. длины трубы:

$$\Delta p_{tub} \pi R^2 \approx 2\pi RL\tau, \quad \tau = \Delta p_{tub} \frac{R}{2L}$$

Отсюда – динамическая скорость (friction velocity)

$$u_{FR} = u^* = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2}$$

Обезразмеривание:

$$u^+ = \frac{\langle u_1 \rangle}{u_{FR}}, \quad y^+ = \frac{u_{FR}}{\nu} y$$

Далее могут быть построены нужные зависимости (использовать – curve length: линия от данной точки, custom field functions – множитель скорости, units – множитель длины – здесь – только для графика(!), свои обозначения осей ...)

Замечание – различия расчёта и эксперимента объективно существуют:

- Лишь приближённое определение профилей скорости как $\log(**)$...
- Установление турбулентности на входе, входной участок
- Вывод – обычно расчёт имеет только «инженерную» точность – в отсутствии прецизионных измерений и высокоточных моделей не следует стремиться к совпадению до 1%

Формулы для сравнения и использования –

Логарифмический профиль продольной скорости:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

Профиль скорости по сечению
– «закон 1/7» для трубы

$$\frac{\langle u_z(r) \rangle}{\langle u_z^{\max} \rangle} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} = \left(\frac{R-r}{R}\right)^{1/7} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

Коэффициент сопротивления
и формула Блазиуса :

$$\Delta p_{tub} = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{\rho U^2}{2}, \quad \Delta p_{tub} \propto L,$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{1/4}}$$

Далее – построение турбулентных величин:

• турбулентная кинетическая энергия:

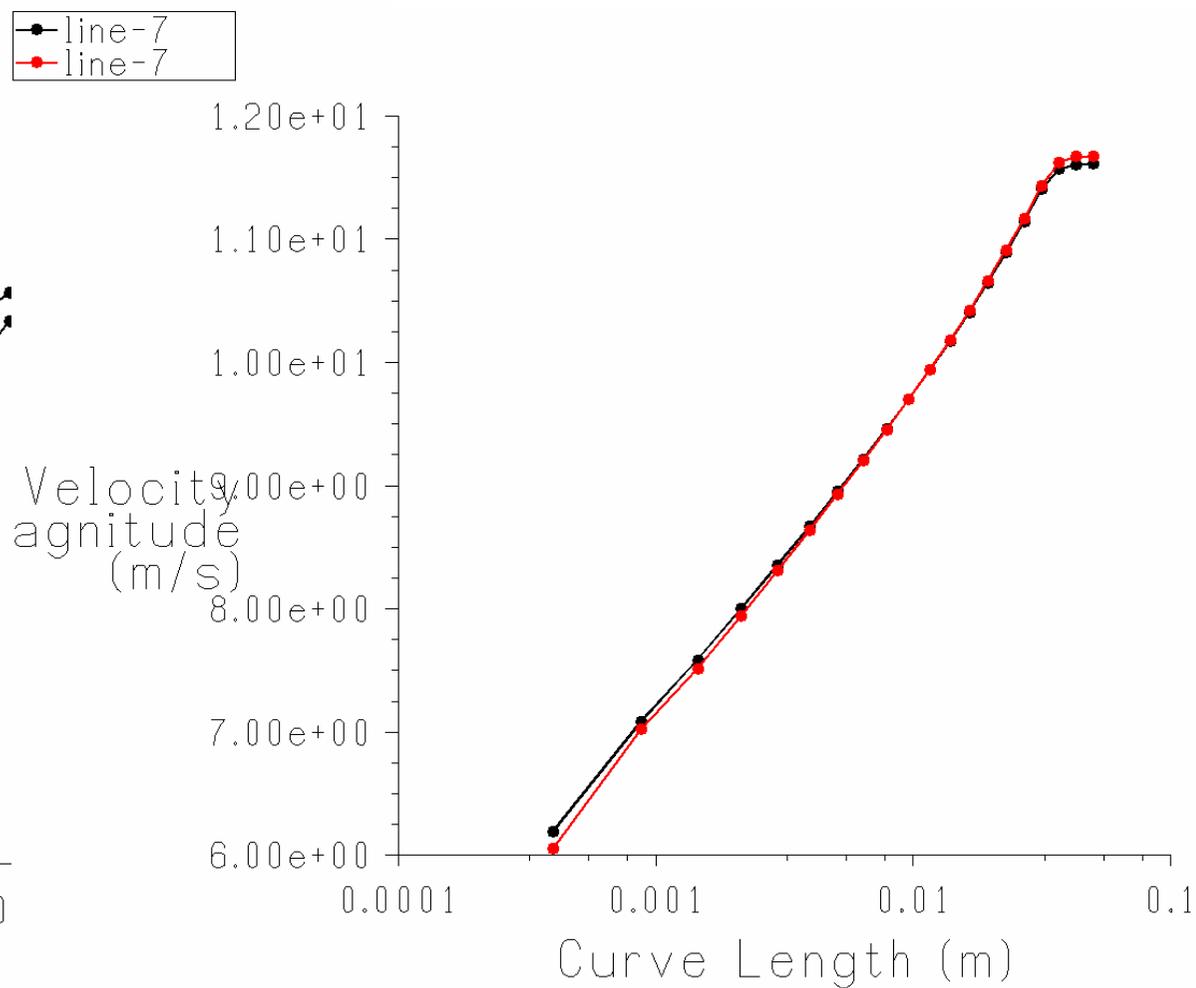
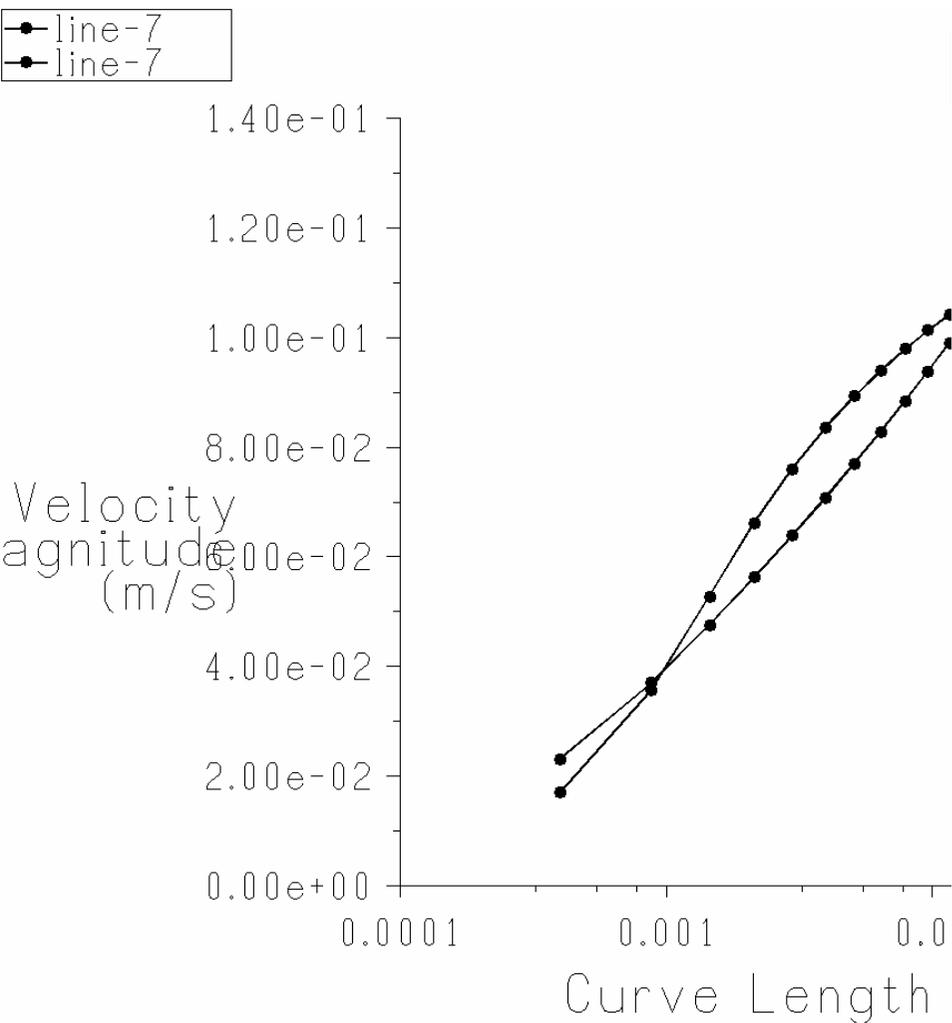
$$\kappa = \frac{1}{2} \langle v_i v_i \rangle$$

• скорость диссипации ε ,

• интенсивность турбулентности :

$$I = \frac{\langle v_1 \rangle}{U_1}$$

Замечание: лог. профиль при разных числах Re

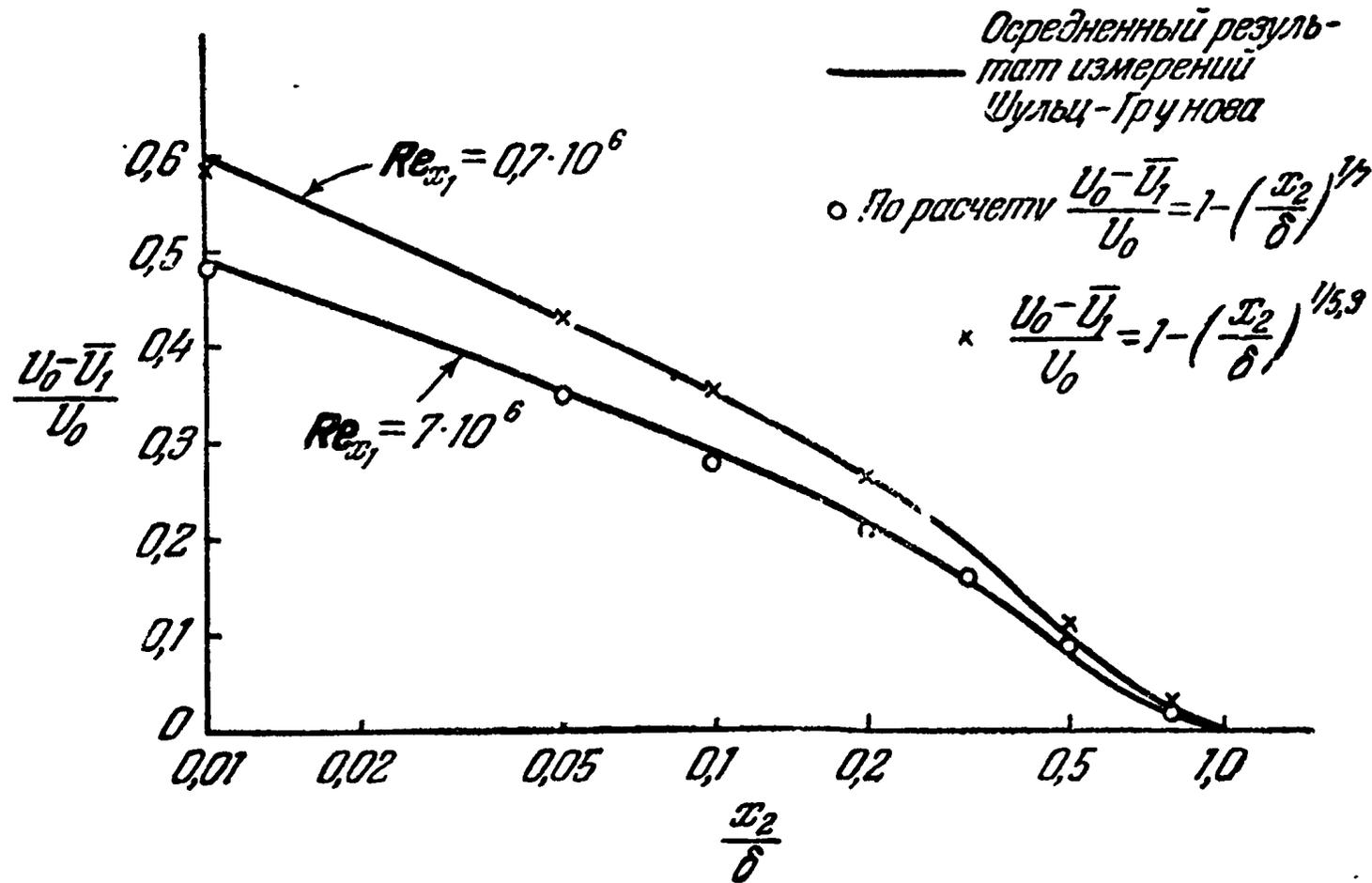


Расчётные профили скорости $u=u(\log(R))$ с опцией enhanced wall ... / no:

RNGke_Re=10⁴ ($y_p=y^+(1)=1$)

RNGke_Re=10⁶ ($y_p=y^+(1)=74$)

Замечание: соотношение для продольной скорости по всему сечению



Хинце: "Этот результат наглядно демонстрирует влияние числа Рейнольдса на величину показателя степени n распределение скорости по степенному закону нельзя рассматривать как универсальное."

Рис. 7.5. Сравнение распределения скорости, соответствующего степенному закону, с результатами опытов Шульц-Грунова [18].

«Закон 1/7» для продольной скорости по высоте: менее универсален, чем логарифм, но определён для всего сечения трубы ...

Турбулентные величины в потоке (см. у Хинце) _1

line-7

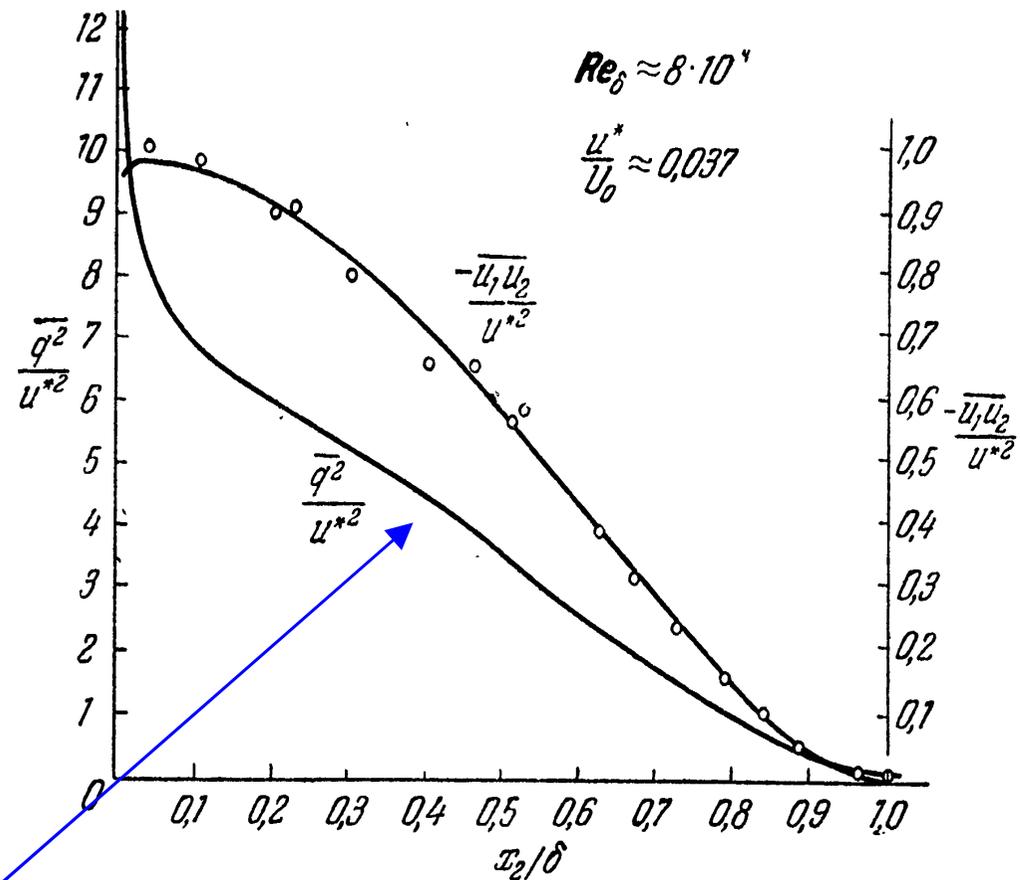
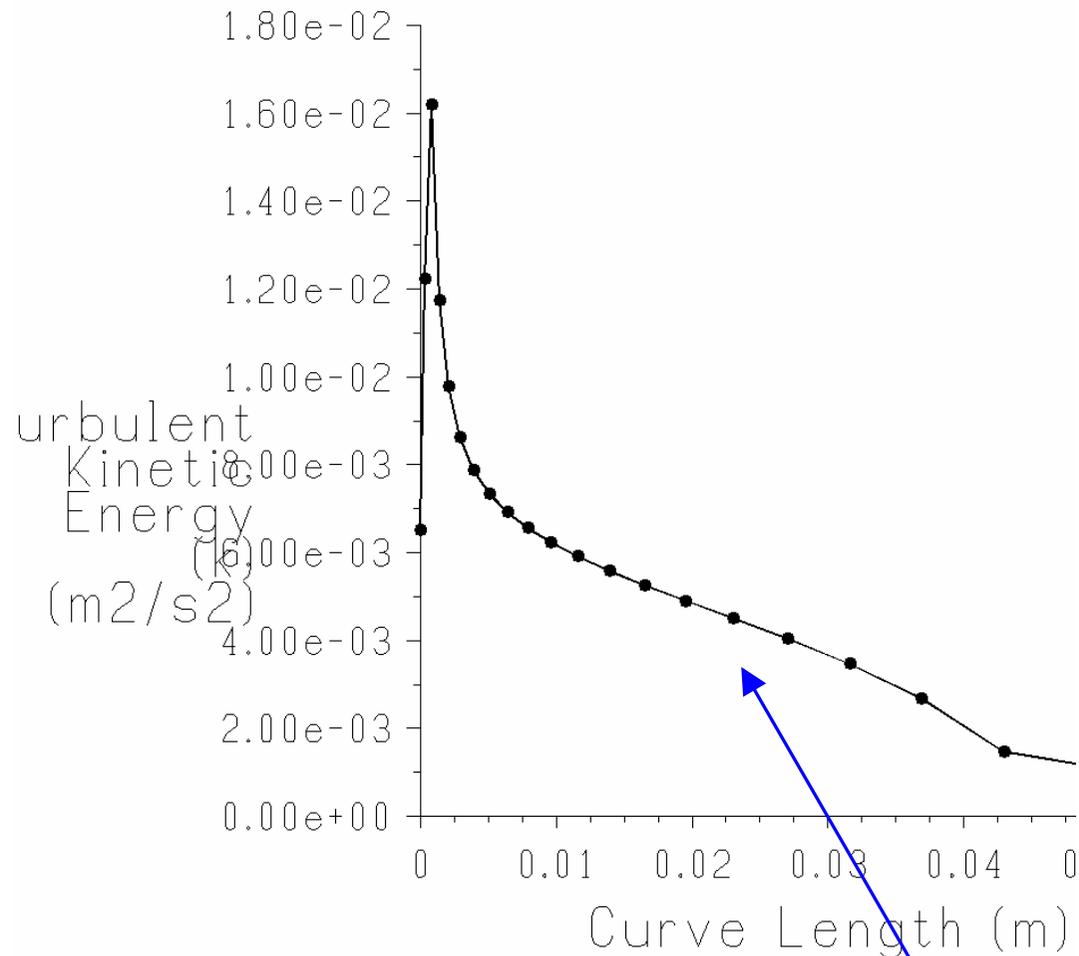


Рис. 7.13. Распределение кинетической энергии турбулентности и турбулентного напряжения сдвига в поперечном сечении пограничного слоя [27].

Сравнение профили турбулентной кинетической энергии – похожи:

Расчётный (RNGke_Re=10⁵)

Экспериментальный (Re=0,8.10⁵)

Турбулентные величины в потоке (см. у Хинце) _2

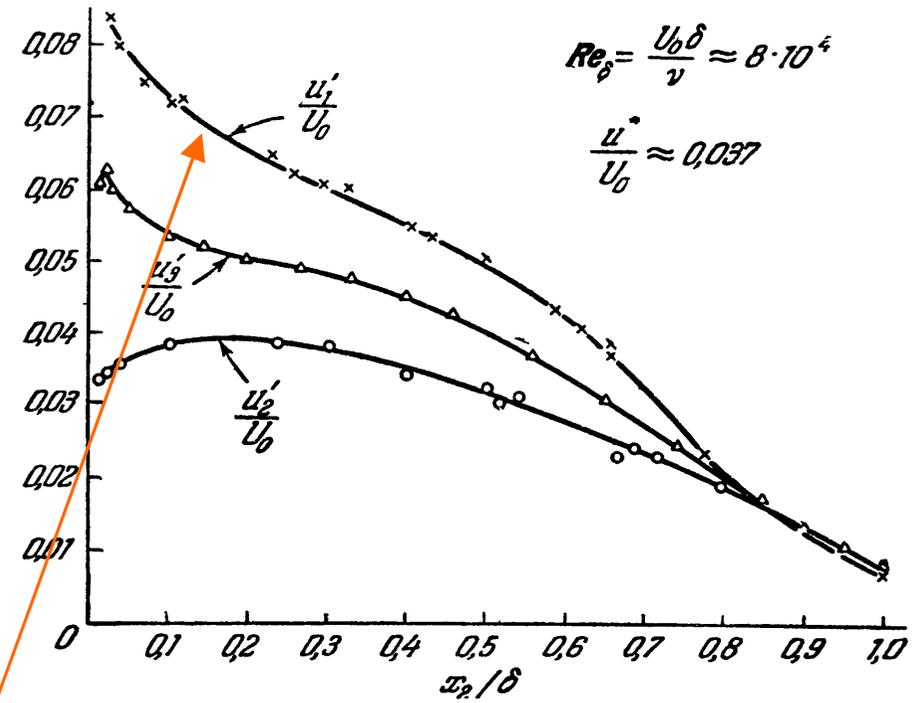
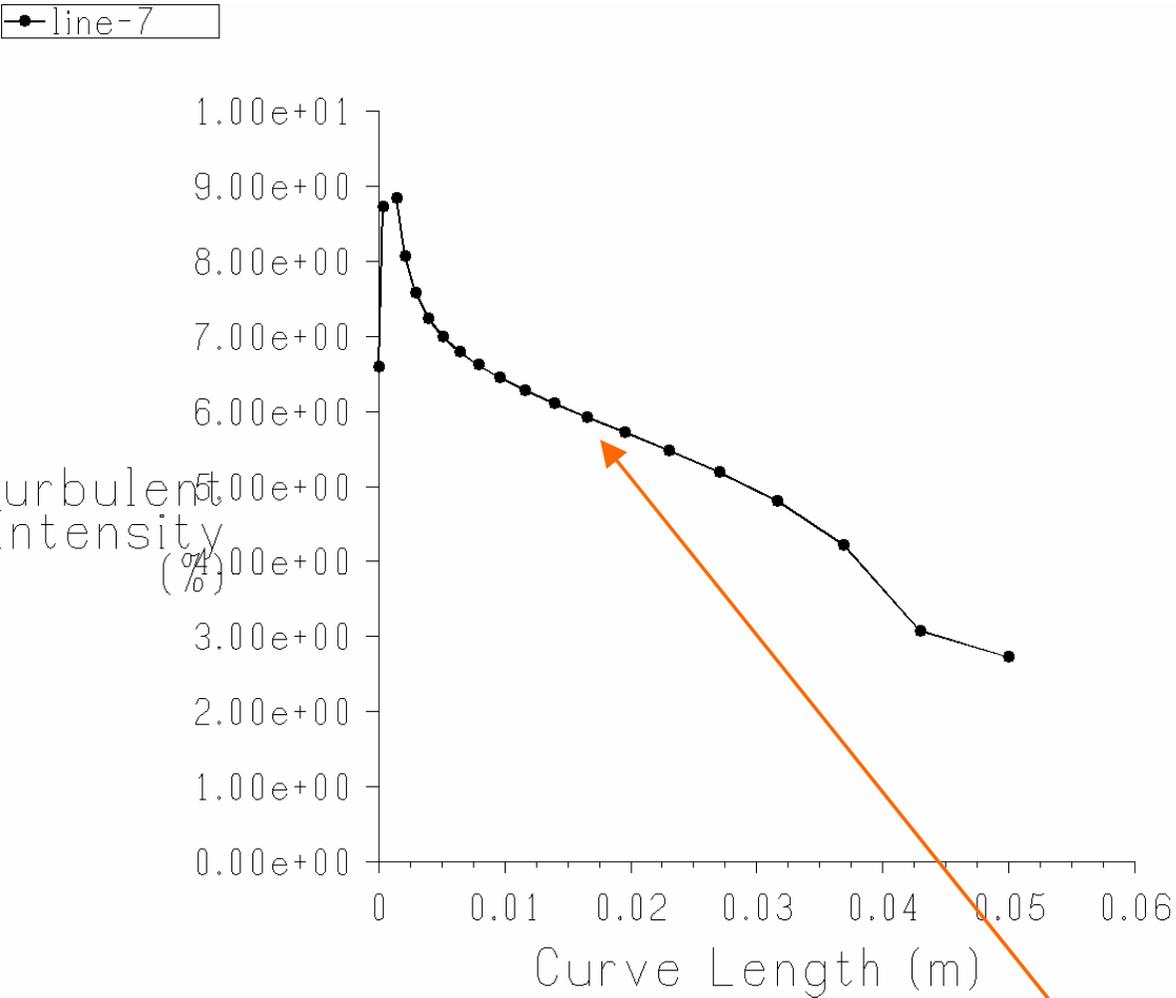


Рис. 7.10. Относительная интенсивность турбулентности в пограничном слое на гладкой стенке при отсутствии градиента давления [27].

Профили интенсивности турбулентности – похожи:

Расчёт (RNGke $Re=10^5$, $max=0,1$)

Эксперимент ($Re=0,8 \cdot 10^5$, $max=0,085$)

Отрывные течения

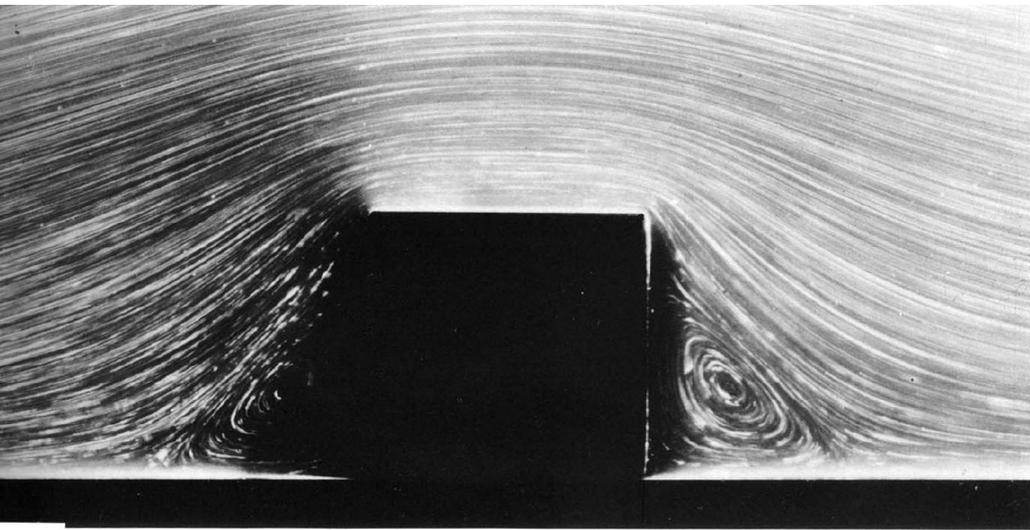
*Дубовый листок оторвался от ветки родимой
И в степь укатился, жестокою бурей гонимый;*

М.Ю.Лермонтов

Отрыв пограничного слоя при резком изменении рельефа

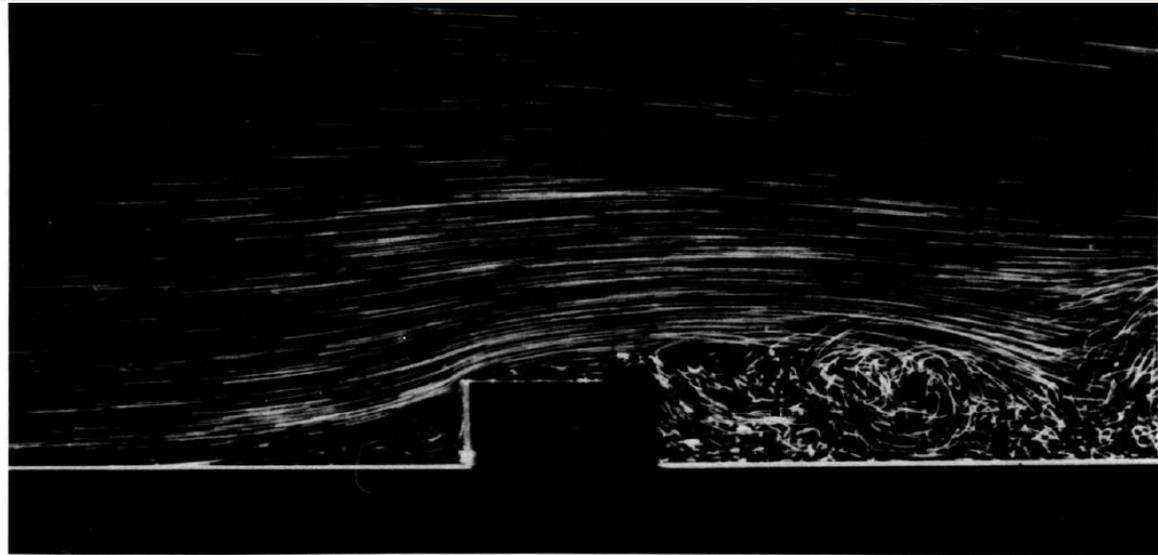
- Строение потока за отрывом
- Место присоединения – восстановление погран. слоя
- Особенности – местное гидравлическое сопротивление, вариации теплоотдачи
- Примеры:
 - задача об обратной ступеньке
 - теплообмен в канале с внезапным расширением

Отрывные течения: примеры (Ван-Дайк)



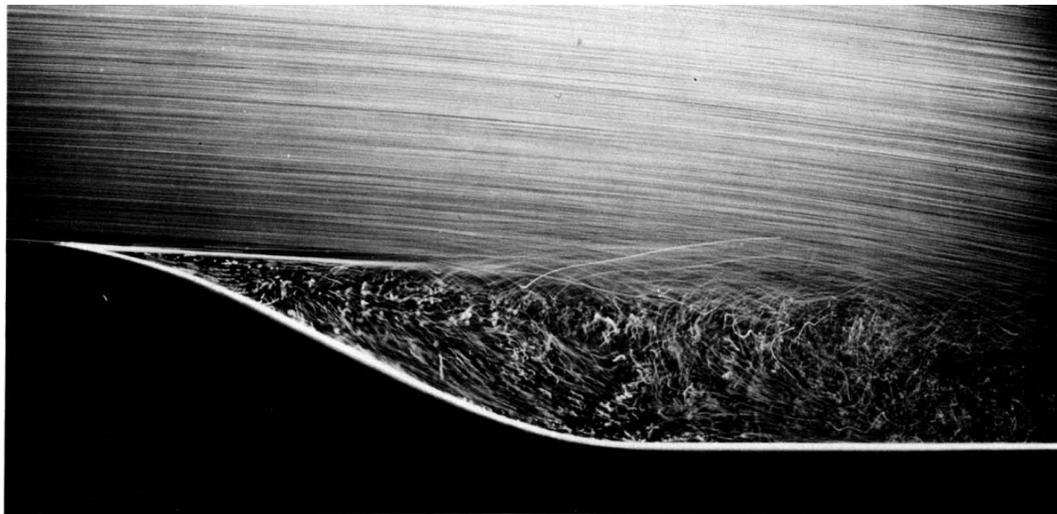
11. Ползущее течение при обтекании квадратного выступа на пластинке. Число Рейнольдса, рассчитанное по стороне квадрата, равно 0,02. В отличие от линий тока безотрывного потенциального обтекания, показанных на фото 5, изображенное здесь плоское течение имеет две области отрыва, которые расположены симметрично спереди выступа

и за ним и в которых образуются большие рециркуляционные вихри. В углах должны существовать последовательности меньших и более слабых вихрей аналогично течению в клине, показанному на фото 10. Визуализация осуществляется с помощью стеклянных шариков в глицерине. [Taneda, 1979]



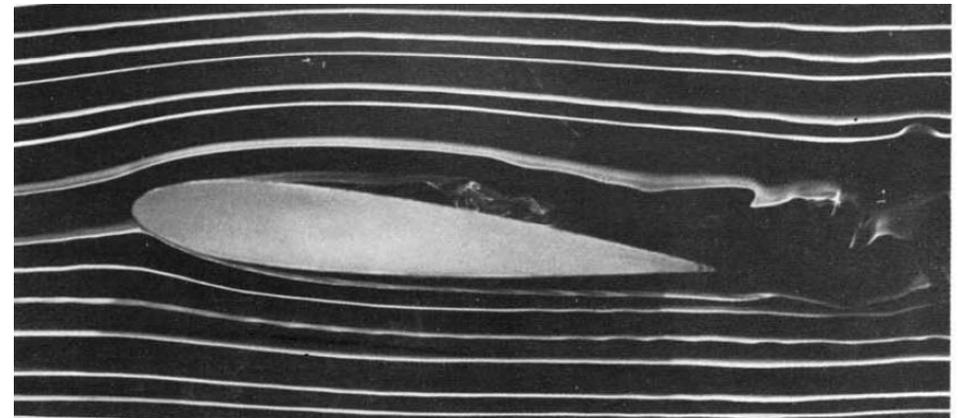
39. Турбулентный отрыв при обтекании прямоугольного выступа на пластинке. Высота выступа велика по сравнению с толщиной набегающего на него ламинарного пограничного слоя. Течение практически плоское, поэтому рециркуляционная

область перед выступом оказывается замкнутой, тогда как в аналогичном трехмерном течении, показанном на фото 92, она открыта и растекается в стороны по бокам. Фото ONERA. [Werlé, 1974]



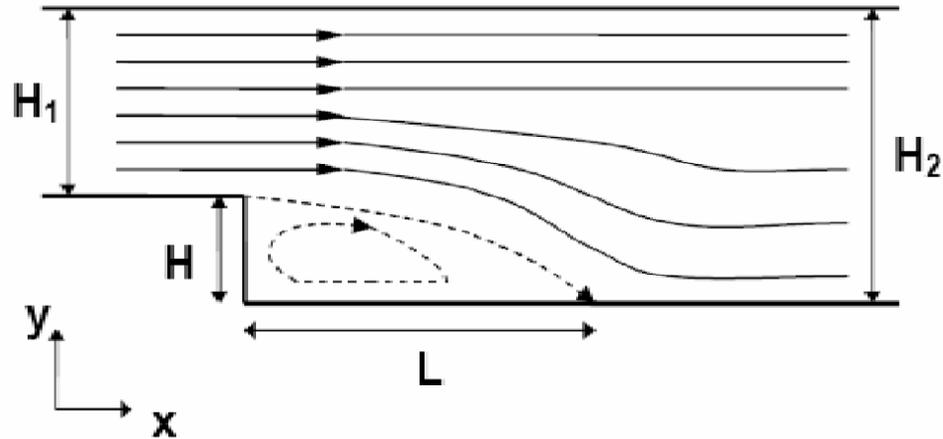
38. Ламинарный отрыв на искривленной стенке. Воздушные пузырьки в воде показывают отрыв ламинарного пограничного слоя, число Рейнольдса которого, рассчитанное по расстоянию от передней кромки, равно 20 000 (передняя кромка здесь не показана). Поскольку пограничный слой

свободен от пузырьков, он проявляется слева в виде тонкой темной линии и отрывается по касательной вблизи начала выпуклой поверхности, оставаясь ламинарным там, где видна темная линия, а затем становится неустойчивым и турбулентным. Фото ONERA. [Werlé, 1974]



72. Симметричный профиль под углом атаки. Дым в аэродинамической трубе показывает отрыв на верхней поверхности профиля, имеющего относительную толщину 15% и установленного под углом атаки 6° , при числе Рейнольдса 20 000. Фото Peter Bradshaw

Задача об обратной ступеньке _1



Явления и задачи

- Отрывное течение – участок свободной турбулентности
- Присоединение потока – место: $L_x=?$
- Вторичное течение – структура?
- Коэффициент трения – касательное напряжение – сопротивление ?

Варьируемые параметры:

Скорость потока – число Re по высоте ступеньки

(или – конфигурация: высота входного участка) ! длина входа – большая!

Модели турбулентности : $k-\epsilon$, $k-w$, RSM. Пристеночные функции ...

Способ решения: стационарное? или – метод установления

Мелкость разбиения сетки – влияет?

Навыки: работа с кодом Fluent:

Адаптация – измельчение сетки

Построение линий тока

Варианты расчётов

Сетка 1: 5000 ячеек, затем – 2- кратное измельчение x4

Сетка 2: 12500 ячеек, однократное измельчение x4

Скорость потока – число Re по высоте ступеньки – фиксировано

Способ решения: стационарное, метод установления

Модели турбулентности : k-e, k-w, RSM – фиксирована

Соотношение размеров области – проверятся влияние на сетках 1 и 2

Задание граничных условий:

На входе – velocity inlet

На верхней границе – wall, slip

На нижней границе – wall, no slip

На выходе – pressure outlet

На ступеньке – wall, no slip

Back step: предлагаемые расчётные варианты

No	Turbulence	Re	Result: $L_x, L_x/H$	Name
1	k-e realizable, <i>standard, затем</i> – enhanced	small / large		
2	k-e realizable, standard, затем – nonequilibrium	small / large		
3	k-e standard, enhanced, nonequilibrium	small / large		
4	k-w, standard			
5	k-w , SST	small / large		
6	Adaptation of No.1	small / large		
7	RSM, standard and nonequilibrium w.f.	small / large		

Что знать, что показать

Отрывное течение – что это такое

Входные данные – развитая турбулентность

Два-три варианта при разных моделях турбулентности или пристеночных функциях

Показать картину течения за уступом

Количественно определить место присоединения потока

Прокомментировать задание граничных условий и др.:

На входе

На выходе

На верхней границе

На нижней границе и на ступеньке

Число Рейнольдса потока

и др. ...

На что ещё влияет отрыв потока: теплопередача при течении в канале с внезапным расширением

Теплообмен в трубе после расширения:

- в окрестности выхода из узкого участка
- на большом расстоянии (пример – формула Диттуса-Бутлера)

Расчётные случаи:

- а) без входного участка (см. Fluent Validation Manual)
- б) с входным участком (для сравнения)
- в) с вариацией пристеночных функций (см. описание теста)

Напоминания:

Коэффициент теплоотдачи, число Нуссельта

Навыки:

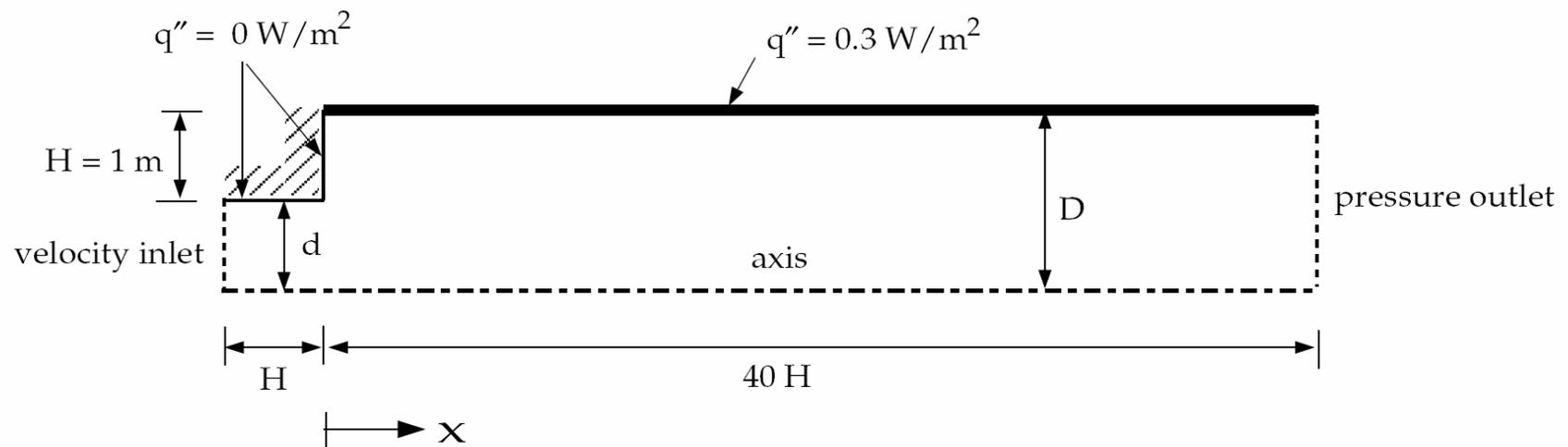
- Задание профилей в граничных условиях – с помощью опции Profiles
- Задание зависимостей – Custom Field Functions

6.1 Purpose

The purpose of this test is to validate FLUENT's standard and non-equilibrium wall functions together with the standard $k-\varepsilon$ and RNG $k-\varepsilon$ turbulence models against the experimental data of Baughn et al. [1].

6.2 Problem Description

Figure 6.2.1 shows the geometry of the expansion considered. The inlet is placed $1H$ upstream of the step. The exit boundary is located $40H$ downstream of the step. The expansion ratio is $d/D = 0.400$, where $d = 1.33$ m is the inlet pipe diameter and $D = 3.33$ m is the downstream pipe diameter.



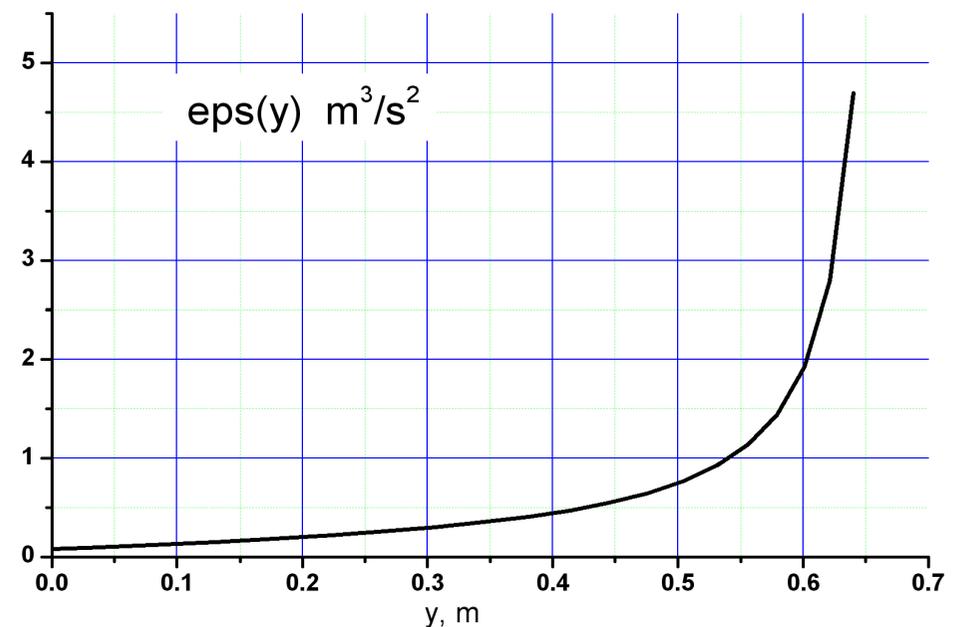
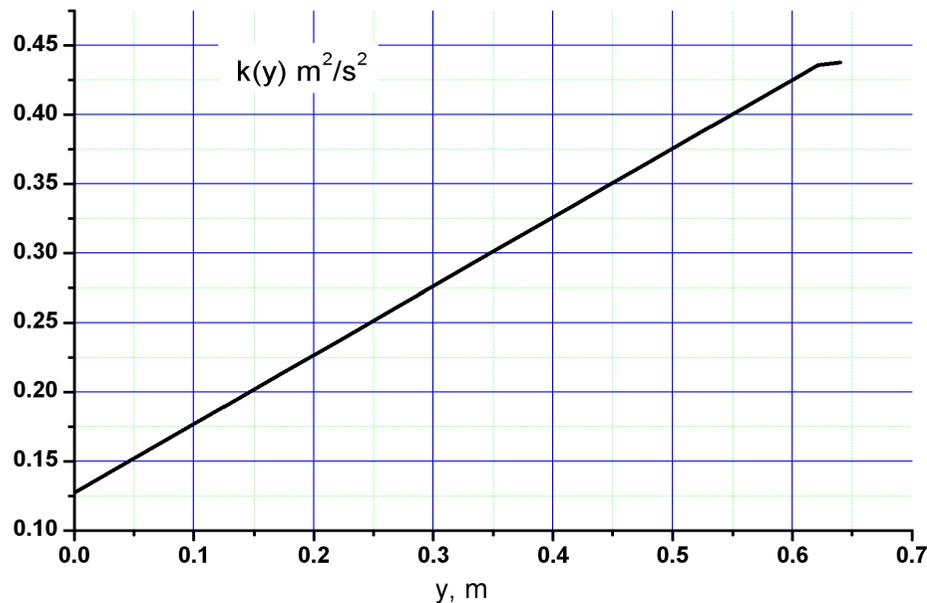
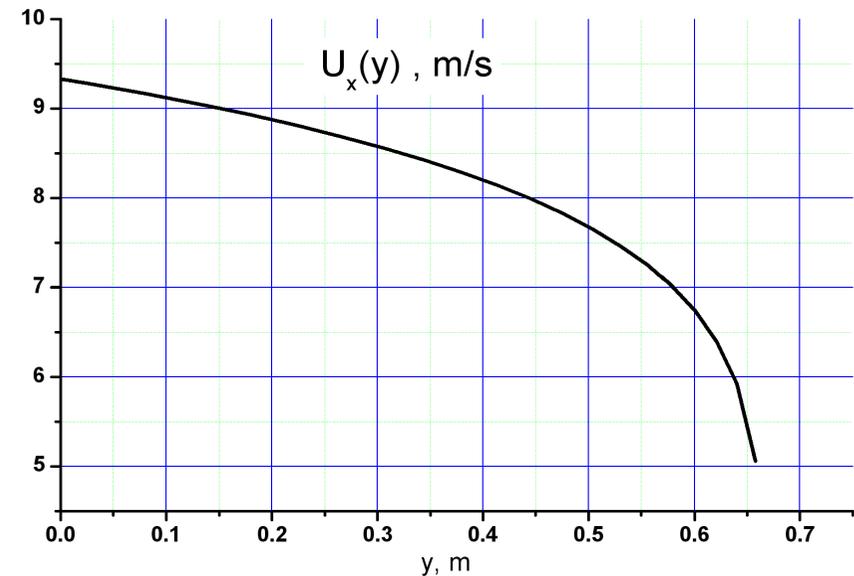
6.3 References

1. Baughn et al., Local Heat Transfer Downstream of an Abrupt Expansion in a Circular Channel With Constant Wall Heat Flux, *Journal of Heat Transfer*, 106:789–796, 1984.
2. Patel, C., Rodi, W., and Scheuerer, G., Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Flows: A Review, *AIAA Journal*, 23(9), 1984.
3. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1979.

Heat Transfer in a Pipe Expansion __3

Входные данные: параметры потока (развитое турбулентное течение в канале) задаются как profiles – таблицы значений

Выходные данные: безразмерный локальный критерий Нуссельта – вычисляется как Custom Field Function



Heat Transfer in a Pipe Expansion __4

The quantity of interest for comparison with the measurements of [1] is the Nusselt number, Nu , along the heated wall. The Nusselt number was calculated from the bulk temperature and the heat transfer coefficient. (See Figure 6.2.1 for the location of x .)

The bulk temperature is

Входящий поток тепла нагревает газ, газ уносит тепло:

$$\frac{1}{4} \pi D^2 \rho U C_p (T_B(x) - T_{in}) = q'' \pi x D$$

$$T_B(x) = \frac{4q'' \pi x D}{\pi D^2 \rho U C_p} + T_{in} = \frac{4q'' x}{\rho v C_p D U / v} + T_{in} = \frac{4q'' x}{\mu C_p Re} + T_{in}$$

$$T_B(x) = \frac{\dot{q}''(x) 4x}{Re \mu c_p} + 273 \quad (6.4-1)$$

$$Re \equiv DU / \nu$$

where $\dot{q}''(x)$ is the local heat flux (constant, in this case). The local heat transfer coefficient is

По определению – коэффициент теплоотдачи на границе –

$$h(x) = \frac{\dot{q}''(x)}{T_{wall}(x) - T_B(x)} \quad (6.4-2)$$

Finally, the local Nusselt number is

По определению – местное число Нуссельта

$$Nu(x) = \frac{h(x) D}{k} \quad (6.4-3)$$

where D is the diameter of the pipe and k is the thermal conductivity of the fluid.

Нормировка по значению на бесконечности

Data of [1] are in terms of Nu/Nu_{DB} where Nu_{DB} is the Nusselt number calculated with the Dittus-Boelter formula.

Цели расчётов: влияние модели ...

The variation of the ratio Nu/Nu_{DB} along the heated wall for the standard $k-\varepsilon$ and RNG $k-\varepsilon$ models with standard wall functions and non-equilibrium wall functions is presented here.

Dittus-Boelter equation

The Dittus-Boelter equation (for turbulent flow) is an [explicit function](#) for calculating the Nusselt number. It is easy to solve but is less accurate when there is a large temperature difference across the fluid. It is tailored to smooth tubes, so use for rough tubes (most commercial applications) is cautioned. The Dittus-Boelter equation is

$$\text{Nu}_D = 0.023 \text{Re}_D^{4/5} \text{Pr}^n$$

Here:

D is the inside diameter of the circular duct

Pr is the [Prandtl number](#)

$n=0.4$ for heating of the fluid, and $n=0.3$ for cooling of the fluid.

The Dittus-Boelter equation is valid for

$0.6 < \text{Pr} < 160$

$\text{Re} > 10000$

$L/D > 10$

Сравнение – по вычисляемым величинам –

Field functions:

$$T_B(x) = \frac{4q''x}{\text{Re}\mu C_p} + T_{in} = \frac{4q''x}{\text{Re} \cdot 0,0001 \cdot 0,7} + 273$$

$$\text{tbulk} = \text{heat-flux} * x * 4 / (40750 * 0.0001 * 0.7) + 273.$$

$$\text{hcoeff} = \text{heat-flux} / (\text{wall-temp-out-surf} - \text{tbulk} + 0.0000001)$$

$$q'' = h(x)(T_B(x) - T_{wall}(x))$$

$$\text{nusselt-no.} = \text{hcoeff} * 3.33333 / 0.0001$$

$$Nu(x) = \frac{h(x)}{\lambda / D}$$

$$\text{nu_nub} = \text{nusselt-no.} / 97.24$$

$$Nu_{plot}(x) = \frac{Nu(x)}{Nu_{DB}} = \frac{Nu(x)}{97,24}$$

Nu_{DB} was computed as 97.24 (at taken mat. props?)

Вычисляются в FLUENT – записываются в файл и читаются в формате языка SCHEME (script)

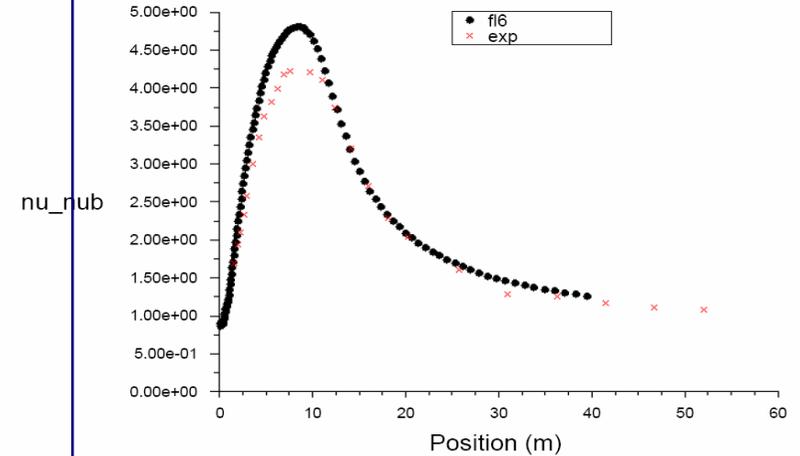
Heat Transfer in a Pipe Expansion __7

No	Turbulence	Input	Result: L_x , L_x/H	Name
1	k-e realizable, <i>standard w.f.</i>	Profiles		
2	k-e realizable, nonequilibrium	=		
3	k-e standard, nonequilibrium	=		
4	k-w, standard	=		
5	k-w , SST	=		
6	k-e standard, nonequilibrium	Длинный вход		
7	RSM, standard (Nonequibr	=		

Heat Transfer in a Pipe Expansion __8

Замечания по расчётам –

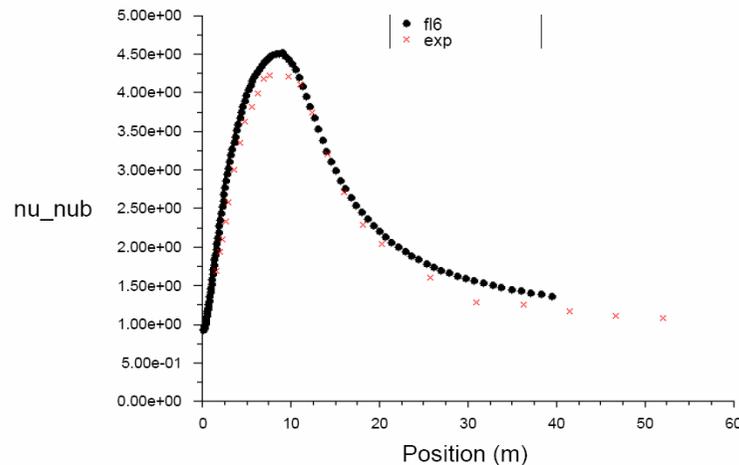
- Максимум потока тепла – в точке присоединения
- Non-Equilibrium WF – лучше в макс., похуже после него
- Наилучшая модель – видимо, RNG, но – см. без Profile!
- Сетка не должна быть очень мелкой –
- Должно быть $y^+ > 10-20$
- Большие x – теплообмен выходит на const: $Nu=Nu_{DB}$
(в ~ 30 больше ламинарной асимптотики Греча-Нуссельта)



bghnexp (Baughn's Pipe Expansion, Re_D = 40,750)
nu_nub
Standard k-e with Standard Wall Functions

Jul 20, 2004
FLUENT 6.2 (axi, segregated, ske)

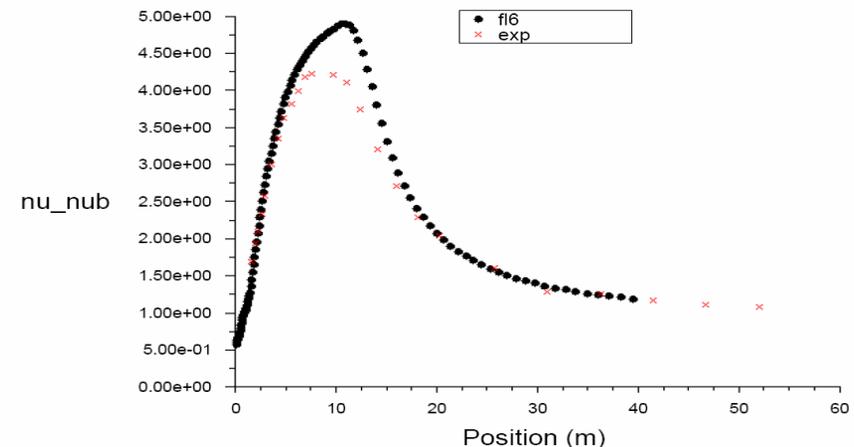
Nu/Nu_{DB} along the Downstream Pipe Wall
(Standard $k-\epsilon$ Model, Standard Wall Functions)



bghnexp (Baughn's Pipe Expansion, Re_D = 40,750)
nu_nub
Standard k-e with Non-Equilibrium Wall Functions

Jul 20, 2004
FLUENT 6.2 (axi, segregated, ske)

Nu/Nu_{DB} along the Downstream Pipe Wall
(Standard $k-\epsilon$ Model, Non-Equilibrium Wall Functions)



bghnexp (Baughn's Pipe Expansion, Re_D = 40,750)
nu_nub
RNG k-e model with Standard Wall Functions

Jul 20, 2004
FLUENT 6.2 (axi, segregated, rngke)

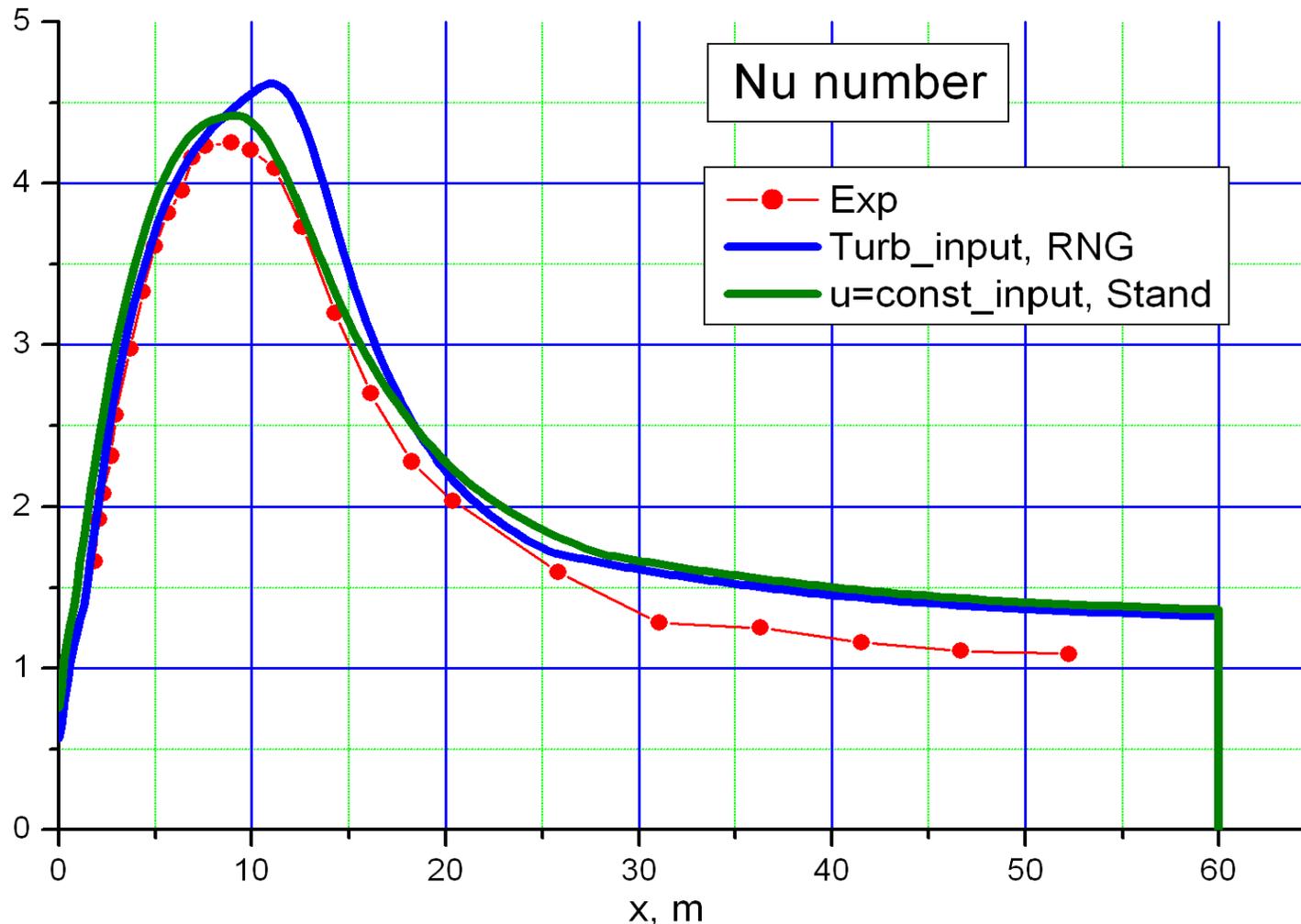
Nu/Nu_{DB} along the Downstream Pipe Wall
(RNG $k-\epsilon$ Model, Standard Wall Functions)

Heat Transfer in a Pipe Expansion __9

Обратить внимание – при расчёте без Profile, с установлением потока:

Для pressure-velocity coupling возможно следует применять coupled solution, т.к. с SIMPLE может быть плохая сходимость итераций;

Далее – влияние типа k-е модели – рекомендованная здесь RNG может быть не наилучшим выбором ...



В задаче о теплообмене в канале с внезапным расширением

Что знать, что показать

Отрывное течение – что это такое

Входные данные – "развитая турбулентность" – способы задания

Показать картину течения за расширением канала

Количественно определить место присоединения потока

Определение числа Нуссельта: формальное и его представление в численном расчёте

Сравнение с экспериментом – вычисление нужных зависимостей в расчёте и построение графика; качественная интерпретация полученной зависимости

Прокомментировать задание граничных условий и др.:

- На входе;
 - На выходе;
 - На верхней границе;
 - На нижней границе и на ступеньке;
 - Число Рейнольдса потока;
- и др. ...

Тело, впернутое в воду, выпирает на свободу -
Сколько впернуто туды, столько выпернет воды,
Вес воды на тело жмёт, вес у тела отберёт.
Закон Архимеда

Вихри враждебные веют над нами,
Тёмные силы нас злобно гнетут ...

Варшавянка, Перевод польской революционной песни 1905 г.

Свободно-конвективные течения

Математические модели и численная реализация

- силы плавучести и неустойчивость Рэля-Тейлора**
- возникновение циркуляции – структура конвективного течения**
- безразмерные комплексы, характеризующие режим конвекции**
- приближение Буссинеска.**

Численный пример – конвекция Рэля-Бенара

Гидростатическое давление и «сила плавучести»

Сила гравитации в жидкости описывается как гидростатическое давление:

$$p_h = -\rho g(z-z_0);$$

- градиент давления входит в силовое уравнение : $\nabla p_h = -\rho \mathbf{g}$ – объёмная сила;
- если эта сила *неоднородна* в пространстве, возникает движение – нас интересует случай неоднородной плотности;
- неоднородность плотности + гравитация → выталкивающая (архимедова) сила. В случае резкой границы сред с разной плотностью – закон Архимеда
- вообще, при переменной плотности вдоль вектора тяготения говорят о "силах плавучести" (они же – "силы тонучести"). Когда лёгкая среда – над тяжёлой, состояние устойчиво (стратификация). Если наоборот – неустойчивая конфигурация;
- в последнем случае возникает движение – естественная конвекция.

В коде FLUENT архимедова сила (buoyancy force) учтена при задании гравитации \mathbf{g} и переменной плотности (в упрощённой форме – приближение Буссинеска)

(В расчёте гидростатическая добавка $-\rho g z$ вычитается из давления, поэтому показываемое давление на первый взгляд выглядит странно ...)

Примеры возникновения свободной конвекции

Гидродинамическая конвективная неустойчивость при вертикальной неоднородности плотности (Рэлей-Тейлора) возникает при определённом градиенте плотности и высоте слоя и приводит к движению

Причины неоднородной плотности:

- неоднородный состав – концентрационная конвекция : $\rho(X(x), T(x))$
- неоднородная температура (термоконвекция) : $\rho(T(x))$

Типичные случаи пространственной конфигурации:

- Термики (неоднородный нагрев поверхности), шлейфы (газ неоднородного состава)
- Конвекция Рэля-Бенара (вертик. градиент вдоль гориз. поверхности)
- У вертикальной/наклонной стенки – горизонтальный градиент
- Тепловыделяющая жидкость с охлаждаемыми границами – более сложное состояние ...

Режим конвекции – режим течения: ламинарное или турбулентное

Безразмерные параметры при разных источниках нагрева

- **Геометрия – размер и форма:** характерная длина R , аспектное отношение $a=h/R$ для другого габарита h (при необходимости – более одного ...)

- **Свойства жидкости, источника тепла и движения** – число Рэлея $Ra=GrPr$:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TR^3}{\kappa\nu}$$

- внешнее число Ra – по перепаду приложенной извне температуры ΔT

число Ra по входящему потоку тепла q_w -

$$Ra_w = \frac{g\beta q_w R^4}{\lambda\kappa\nu}$$

$$Ra_i = \frac{g\beta QR^5}{\lambda\kappa\nu}$$

- внутреннее (модифицированное) число Ra по объёмному источнику

– **Взаимосвязь** $Ra=Ra(Ra_i)$:

$$Ra_i = \frac{QR^2}{\lambda\Delta T} Ra = Nu(Ra_i) \xi Ra \sim 10^3 Ra \quad (\xi \sim 1, Nu(Ra_i = 10^{16}) \sim 10^3)$$

- **Безразмерный поток тепла** – **локальное и среднее по границе W числа Нуссельта:**

$$Nu(x) = \frac{f_n(x)}{\lambda(T_{bulk} - T_w(x))/R}, \quad x \in S_w$$

$$Nu_w = \frac{1}{S_w} \int_{S_w} \frac{f_n}{\lambda(T_{bulk} - T_w)/R} dS$$

– Соотношение средних потоков тепла на изотермических границах 1 и 2, $T_1=T_2$:

$$\frac{Nu_1}{Nu_2} = \frac{S_2 \int_{S_1} f_n dS}{\int_{S_2} f_n dS}$$

Приближение Буссинеска

В условиях отсутствия иных сил архимедова сила служит единственной причиной, вызывающей движение жидкости. При наличии других объёмных сил они действуют наряду с архимедовой силой.

Невозмущённое значение давления не вошло в суммарную силу. Внесём получившееся выражение в уравнение (5.7). Добавляя уравнение неразрывности и энергии, переобозначая малую добавку к давлению той же буквой p , выпишем систему уравнений движения при свободной конвекции жидкости в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i - g_i \alpha (T - T_0) + G_i \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \kappa \Delta T + \frac{Q}{\rho c_p} \quad (6.8)$$

Опции кода Fluent при моделировании своб. конвекции

Гравитация – задаётся покомпонентно вектор гравитационного поля

Граничные условия

гидростатическое давление учитывается средствами FLUENT автоматически

Способ вычисления плотности в предположении несжимаемости

- Boussinesq (см. свойства материалов)
- Incompressible ideal gas (там же)
- Задание температурной зависимости плотности (там же)
- UDF – пользовательская функция (там же)

В случае сжимаемости – вычисление по уравнению состояния ...

Схема аппроксимации уравнения давления

Корректно работают только две схемы –

- Presto (предпочтительно)
- Body force weighted (менее популярна, иногда даёт странные отклонения, но в целом – более устойчива)

Порождение турбулентности при естественной конвекции

The turbulence kinetic energy, k , and its rate of dissipation, ϵ , are obtained from the following transport equations:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k$$

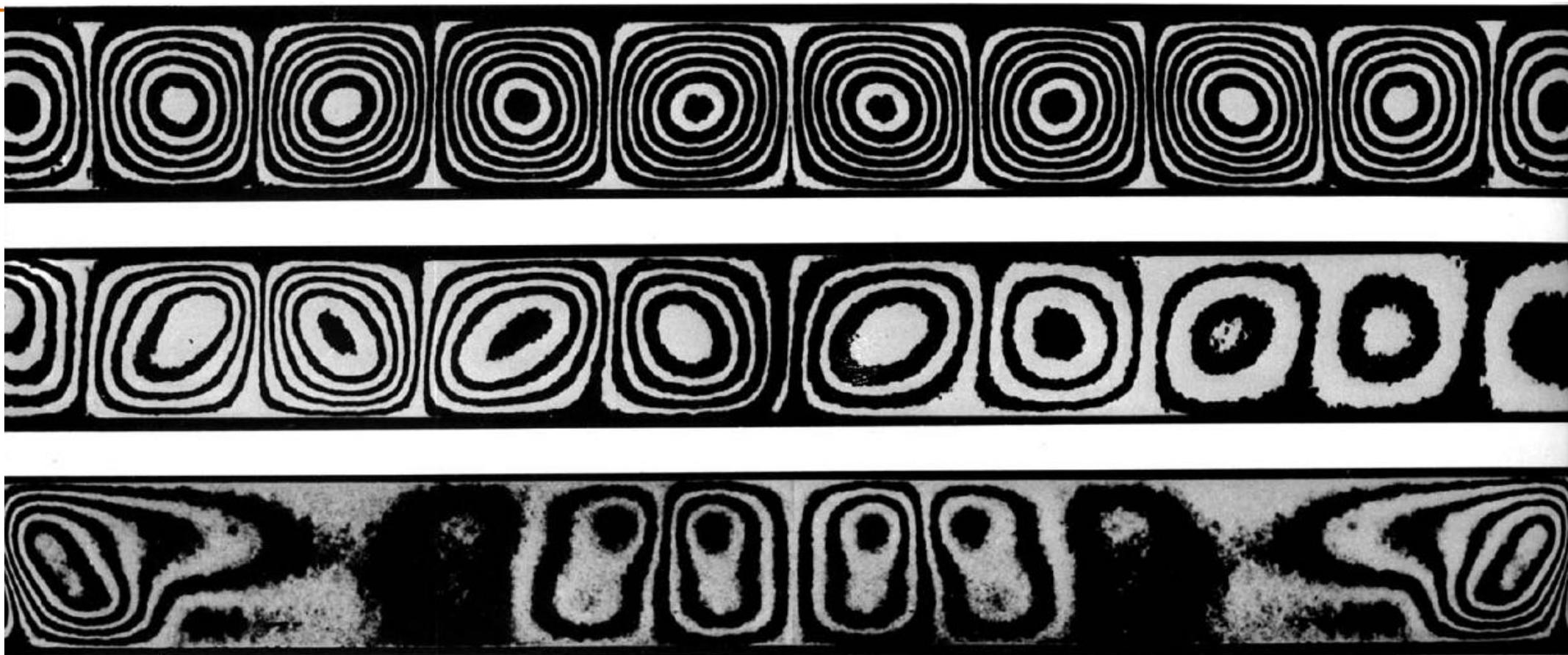
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon$$

In these equations, G_k represents the generation of turbulence kinetic energy due to the mean velocity gradients. **G_b is the generation of turbulence kinetic energy due to buoyancy.**

Y_m represents the contribution of the fluctuating dilatation in compressible turbulence to the overall dissipation rate.

$C_{1\epsilon}$, $C_{2\epsilon}$, $C_{3\epsilon}$, G_k are constants. σ_k and σ_ϵ are the turbulent Prandtl numbers for k and ϵ , respectively. S_k and S_ϵ are user-defined source terms.

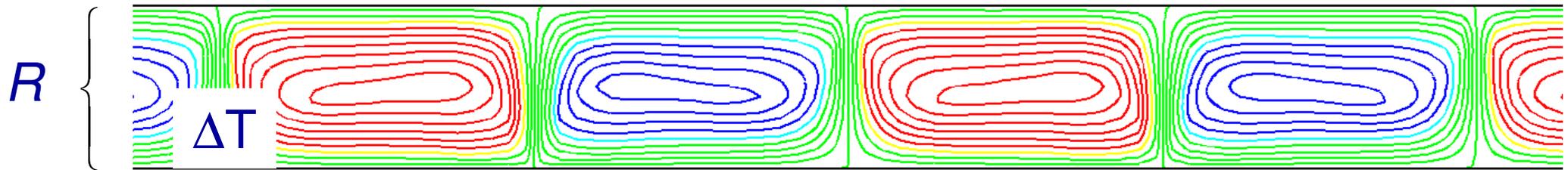
Конвекция Рэля-Бенара (РБК)



139. Конвективные валики, движимые плавучестью. Дифференциальные интерферограммы демонстрируют сбоку картины конвективной неустойчивости силиконового масла в прямоугольном ящике с относительными размерами сторон $10 : 4 : 1$, подогреваемом снизу. На верхнем снимке видна классическая ситуация Рэля–Бенара: рав-

номерный нагрев создает валики, параллельные более короткой стороне. На средней фотографии разность температур, а следовательно, и амплитуда движения возрастают в направлении справа налево. На нижней фотографии ящик вращается относительно вертикальной оси. [Oertel, Kirchartz, 1979; Oertel, 1982a]

Параметры описания



Конвекция между плоско-параллельными пластинами – задана разность температур между ними. Режим характеризуется числом Рэлея:

$$Ra = \alpha g \Delta T R^3 / (\nu \kappa)$$

α – объёмное тепловое расширение

g – гравитационное ускорение

ΔT – перепад температуры

R – характерный размер

ν, κ – вязкость, температуропроводность

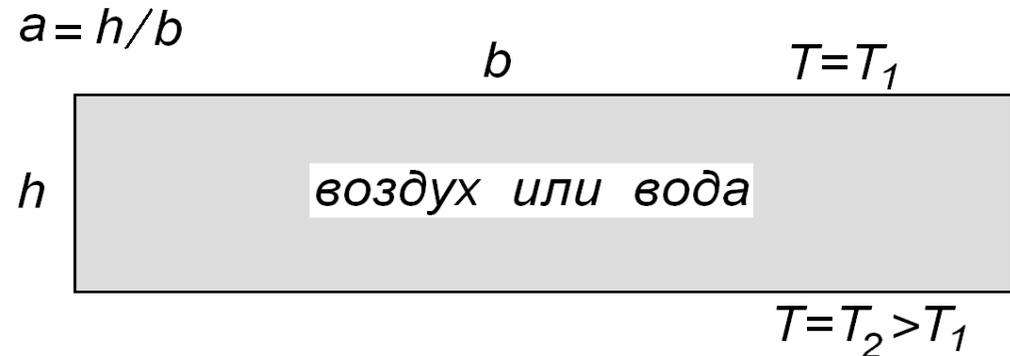
- Величина числа Рэлея показывает режим течения: ламинарный/ турбулентный; теплоотдача жидкости при конвекции описывается параметром $Nu = Nu(Ra)$.
- В RANS-моделях, из-за высокой турбулентной вязкости, картина течения всегда выглядит ламинарной. Тепло- и массообмен при этом учитываются эффективными коэффициентами турбулентного переноса

Лабораторная работа: конвекция Рэля-Бенара

плоско-параллельные горизонтальные пластины : $T(z_1) = T_1$, $T(z_2) = T_2$

а) ламинарный режим: $Ra < 10^7 - 10^8$

б) турбулентный: $Ra > 10^8$



Цели расчётов

- получить закон теплоотдачи $Nu = Nu(Ra)$ в нескольких расчётах с вариацией Ra

- оценить влияние выбора –

а) опций расчёта: модели турбулентности, опций учёта плавучести, ...

б) коэффициентов: вязкости, КТР, теплофизических ...

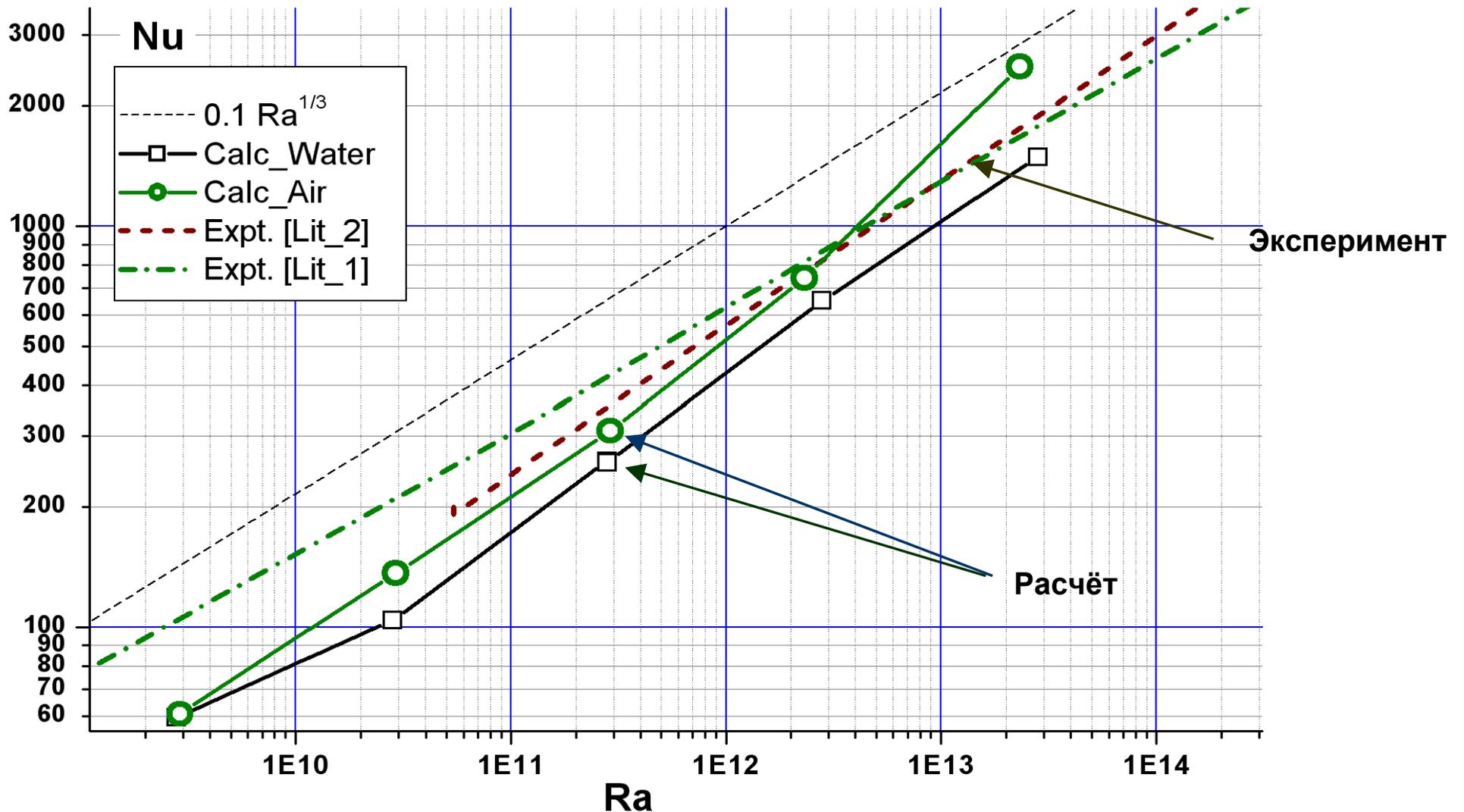
Существенно!

а) пристеночные функции при $y^+ \sim 10$ (standard ...)

б) зависимости коэффициентов от температуры – не вводить (для ясности)

в) в газах – перепад температуры – incompressible ideal gas

Результаты по РБК_1/2



Интегральная теплоотдача при РБК – расчёты для воды (Calc_Water) и воздуха (Calc_Air). [Lit_1]=[42], [Lit_2]=[43]

Комментарии

- Теплопередача удовлетворительно описывается корреляцией «1/3»:

$$Nu(Ra) = C Ra^{1/3}$$

- Взятые значения числа Ra – в пределах $3 \cdot 10^{13}$, чего более чем достаточно для многих задач, например, для моделирования бассейна металлического расплава в корпусе реактора;
- Влияние вариации констант материала и др. в целом описывается в расчётах числом Ra , **за исключением отдельных случаев**
 - большие (в 10 и более раз) вариации теплоёмкости и теплопроводности (вода)
 - при низких (менее 10^9) значениях числа Ra лучший результат дают расширенные (enhanced) пристеночные функции (но только здесь!!)
- **Показатель степени в приведённых по литературе корреляциях близок к 1/3, но не всегда ему равен**

В задаче о конвекции РБК

Что знать, что показать

За счёт чего возникает движение в численном расчёте – что потребовалось задать?

Входные данные – число Рэлея и режим турбулентности в расчётах

Вариантные расчёты при разных Ra – определить $Nu(Ra)$ – как вычислены, что варьировалось, что показывает Nu ?

Варианты серий расчётов (получение $Nu(Ra)$): при разных моделях турбулентности или пристеночных функциях.

Прокомментировать задание свойств материала гран. условий, дискретизации :

- способ дискретизации уравнения для давления;
- способ ввода архимедовой силы;
- pressure-velocity coupling
- учёт плавучести в турбулентности

Вопросы по курсу:

- **Вопросы для изучения** ("Вопросы по разделам курса ...")
- **Вопросы для ответа** ("Вопросы, при незнании которых ...")

Вопросы по разделам курса 1/3

- 1) Уравнения движения (не)сжимаемой жидкости. Уравнение энергии. Когда уравнение энергии необходимо, когда – нет. Постановка гран. условий для каждого из них. Уравнение неразрывности в случае несжимаемой жидкости?
- 2) Отличительные черты турбулентного потока. Завихрённость и энстрофия. Развитая, неразвитая, перемежающаяся турбулентность. Пульсации, свойства спектра пульсаций при развитой турбулентности.
- 3) Предположения моделей турбулентности? Что требуется от модели? Что такое RANS модели? Моменты случайной величины. Правила усреднения. Возможность их применения в рамках предположений моделей.
- 4) Уравнения Рейнольдса для осреднённого течения: идея, последовательность вывода, оценки слагаемых. Итоговое уравнение: проблема замыкания и гипотеза Буссинеска. – какая скорость деформации фигурирует в усл. Буссинеска?
- 5) Уравнение энергии для осреднённого течения: последовательность вывода, итоговое уравнение – интерпретация слагаемых и замыкание. Турбулентные числа Прандтля и Шмидта, величина в коде FLUENT и их качественное обоснование. Аналогия Рейнольдса.
- 6) Уравнение баланса механической энергии потока. Уравнение баланса турбулентной кинетической энергии: определения средней КЭ и ТКЭ, последовательность вывода и итоговое уравнение – интерпретация слагаемых. Как определяется кинетическая Е. потока? Как определяется ТКЭ?

Вопросы по разделам курса 2/3

- 7) Замыкание RANS–моделей турбулентности: логическая последовательность, пример. Типы моделей турбулентности. Модели турбулентности k – ε и k – ω – основные уравнения. Турбулентная вязкость: определение, связь с k и ε . Турб. вязкость зависит от коорд.?
- 8) Вычислительная гидродинамика (CFD) – общее строение стандартного CFD кода. Использование симметрии: связь между 2D и 3D приближениями. Сетка: стандартные типы ячеек в 2D и 3D. Сеточные примитивы и необходимые данные для задания сеточной модели.
- 9) Изотропная турбулентность: условия существования, примеры реализации. Пограничный слой, турбулентный и вязкий подслой. "Закон стенки": логарифмический профиль величин в турбулентном ПС. Безразмерные характеристики. Пример для трубы: вязкий, логарифмический подслой и ядро потока. Критерий y^+ . Температура в пристеночной области.
- 10) Моделирование турбулентного потока у стенки: в теории и в CFD? Пристеночная функция. Реализация в CFD коде. Задание граничных условий по турбулентности в коде FLUENT – способы и возможности оценки необходимых величин. Каковы требования к расчётной сетке у границы потока при использовании обычных пристеночных функций в модели k – ε ? Что даёт опция "enhanced wall treatment"?

Вопросы по разделам курса 3/3

- 11) Последовательность решения уравнений гидродинамики сжимаемой и несжимаемой жидкости в CFD-коде (на примере FLUENT). Типы процедур-решателей, особенности и условия их применения. pressure-based, density-based – в чём разница?
- 12) Пристеночный тепло- и массообмен: коэффициент тепло- массоотдачи, число Нуссельта: локальное, интегральное. Что такое "bulk" и "film" температуры. Аналоги для концентрации примеси. Примеры на расчётных конфигурациях.
- 13) Выталкивающая сила (сила плавучести) – происхождение, примеры возникновения (причины неоднородной плотности). Параметры, определяющие свободно-конвективное течение. Числа Грасгофа и Рэлея (рассмотреть три случая генерации тепла). Число Нуссельта.
- 14) Конвекция Рэлея-Бенара – ламинарная, слабо-турбулентная, жёстко-турбулентная. Подходы к моделированию – стационарный и метод установления. Критерии установления. Особенности численной картины при расчёте с RANS-моделью. Критерии сходимости итераций в численном расчёте (FLUENT).

Вопросы при незнании которых хорошая оценка проблематична

1. Примеры турбулентного течения и визуальные признаки турбулентности.
2. Что такое "развитая" турбулентность? Примеры случаев, когда она не развита? Что такое вырождение турбулентности?
3. Верхний и нижний пространственные масштабы турбулентности.
4. Что такое спектр турбулентности?
5. Что такое изотропная турбулентность? С чем бывает связана анизотропия турбулентности?
6. Что в гидродинамике понимается под термином "модель турбулентности"? Пример.
7. Какие бывают способы моделирования турбулентности? Схема построения RANS моделей?
8. Из чего состоит общее транспортное уравнение? Пример?
9. Что такое тензор напряжений Рейнольдса? Как он связан с ТКЭ?
10. Что такое аналогия Рейнольдса - происхождение, где и как используется?
11. Турбулентная вязкость: происхождение.
12. Турбулентная теплопроводность – аналогично 11.
13. Что такое "2–параметрическая модель" турбулентности? Примеры
14. Что такое ТКЭ?
15. Что такое "универсальный закон стенки"?
16. Что такое y^+ ? Что он показывает в пристеночной области?
17. Сетка и сеточные примитивы, примеры: 2D, 3D
18. Что и как надо задать в коде FLUENT для решения задачи свободной конвекции?