

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN ACADEMY OF
SCIENCES

ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО
РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

NUCLEAR
SAFETY INSTITUTE

Препринт № NSI-26-94

Preprint NSI-26-94

Р.В. Арутюнян, Л.А. Большов, М.Ф. Каневский, И.И. Линге,
Е.А. Савельева

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
МЕТОДОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ
ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ
ЧЕРНОБЫЛЬСКИХ ВЫПАДЕНИЙ**

Москва
1994

Moscow
1994

Р.В. Арутюнян, Л.А. Большов, М.Ф. Каневский, И.И. Линге, Е.А. Савельева
СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ЧЕРНОВЫЛЬСКИХ ВЫПАДЕНИЙ. Препринт № NSI-26-94. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 1994. 43 с.

Аннотация

В работе проведен сравнительный анализ нескольких методов, часто использующихся для интерполяции пространственно распределенных данных. На основе этого анализа выработана схема, позволяющая выбрать метод пригодный для оценки имеющихся данных и подобрать для него задаваемые параметры.

©ИБРАЭ РАН, 1994

R. Arutyunyan, L. Bolshov, M. Kanevsky, I. Linge, E. Savel'eva. COMPARATIVE ANALYSIS OF SPATIAL INTERPOLATION METHODS BY USING CHERNOBYL FALLOUT DATA.(in Russian). Preprint NSI-26-94. Moscow: Nuclear Safety Institute, August 1994. 43 p.

Abstract

The spatial data analysis of the Chernobyl fallout by using different methods is presented. Results of the cross-validation and prediction maps are described. Several recommendations for the selection of the model and model-dependent parameters are discussed.

©Nuclear Safety Institute, 1994

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ЧЕРНОБЫЛЬСКИХ ВЫПАДЕНИЙ

Р.В. Арутюнян, Л.А. Большов, М.Ф. Каневский, И.И. Линге, Е.А. Савельева

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

113191 Москва, ул. Б.Тулльская, 52

тел.: (095) 952-24-21, факс: (095) 230-20-29, эл. почта: pbl@ibrae.msk.su

Содержание

1	Введение	4
2	Описание методов	4
3	Описание данных	5
4	Сравнение результатов на регулярной сетке	6
5	Кросс-валидация и выбор метода	7
6	Заключение	9
7	Приложение. Рисунки 1-63	11

1 Введение

Важной частью экологического моделирования является анализ пространственно распределенных данных. Для принятия решений по значениям, заданным в отдельных точках нужно уметь восстановить полную картину изучаемого процесса. Таким образом глобальная проблема может быть сформулирована следующим образом: имеется набор точек $p_i = (x_i, y_i)$ произвольным образом распределенных на некоторой ограниченной области поверхности. Каждая точка имеет значение некоторой величины (например, загрязнение вредным веществом, годовое количество осадков, содержание золота в пробе и т.д.) $Z_i = f(x_i, y_i)$. Необходимо оценить значение $f(x, y)$ на всей интересующей нас области.

Существует огромное множество методов, использующихся для такого рода пространственных интерполяций [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9, 10, 13]. Идет непрерывный процесс их совершенствования и усложнения.

Неоднократно делались попытки сравнения различных процедур оценки [1, 2, 13, 3]. Но все они проводились на известных во всех точках данных (искусственно созданные поверхности [1, 13], известная на очень подробной сетке топографическая поверхность [2, 11]). Критерии сравнения тоже были различными (экономический [11], относительные ошибки [13], эффективность, как глобальная величина от ошибок [3], Т-статистика [17] и другие). И что самое существенное получались различные результаты, то есть лучшими оказывались различные процедуры [13, 11]. Это означает, что невозможно выбрать абсолютно лучший метод, а предпочтительный метод зависит от процесса, представленного исходными данными, распределения на поверхности точек с известными значениями, от разброса известных значений и т.д.

В работе поставлена задача провести сравнение некоторых простых технологий предсказания неизвестных значений на реальных данных, известных только в некоторых заданных точках.

2 Описание методов

Для проведения сравнения использовались наиболее часто используемые методы пространственной интерполяции:

1. Линейный интерполятор с весовыми коэффициентами обратно пропорциональными квадрату расстояния до точки (кратко метод обратных квадратов) [11].
2. Линейный оценщик — обычный кригинг со сферической семивариограммой [12].
3. Метод мультиквадратичных уравнений [9].

Ниже приведены краткие пояснения по каждому из них.

Линейный интерполятор (или оценщик) это такой метод, когда оцениваемое значение ($\hat{Z}$), представляется в виде:

$$\hat{Z} = \sum_{i=1}^N w_i Z_i, \quad (1)$$

где N — число точек, учитываемых при проведении оценки, w_i — весовой коэффициент для i -ой точки, Z_i — значение величины в i -ой точке.

Для метода обратных квадратов весовые коэффициенты вычисляются по формуле:

$$w_i = \frac{(R_s - R_i)^2}{(R_i R_i)^1} \left\{ \sum_i^N \frac{(R_s - R_i)^2}{R_i R_i} \right\}^{-1}, \quad (2)$$

где R_i — расстояние от i -ой точки до оцениваемой, R_s — радиус, внутри которого точки учитываются при оценке.

Для обычного кригинга весовые коэффициенты находятся с использованием следующих условий:

1. Условие несмещенности оценки:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (3)$$

2. Условие минимизации ошибки, то есть

$$\text{Var}[\hat{Z}(x_0, y_0) - Z(x_0, y_0)] = \min \quad (4)$$

Применяя вариационное исчисление к этим условиям и используя формулу семивариограммы получаем линейную систему из $(N+1)$ -ого уравнения с $(N+1)$ -им неизвестным

$$\sum_{j=1}^N w_j \gamma(p_i - p_j) + \mu = \gamma(p_i - p) \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

где μ — множитель Лагранжа, а $\gamma(p_i - p_j)$ — семивариограмма. Решив эту систему и находим кригинговые весовые коэффициенты.

В качестве семивариограммы в настоящей работе взята сферическая модель с параметрами подобранными автоматически [18]. Сферическая модель, представляется формулой:

$$\gamma(r) = \begin{cases} c0 + (c - c0) \left(\frac{1.5r}{a} - \frac{.5r^3}{a^3} \right) & \text{for } r < a \\ c & \text{for } r > a \end{cases}$$

где $c0$ — “самородок”, c — “порог”, a — диапазон — подбираемые параметры.

Метод мульти-квадратичных уравнений основан на попытке представить оцениваемую поверхность, как сумму квадратичных поверхностей:

$$\sum_{i=1}^n c_i [q(x_i, y_i, x, y)] = Z \quad (6)$$

где Z — функция от x и y полученная в результате суммирования квадратичных поверхностей одного класса q . Вертикальные оси симметрии каждого квадратичного члена расположены в точках x_i, y_i . Коэффициент c_i определяет алгебраический знак вхождения члена и его плоскость. Чаще всего в качестве квадратичных поверхностей используются круговые гиперболоиды:

$$q(x_i, y_i, x, y) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + C} \quad (7)$$

C — произвольный параметр, при $C = 0$ получается конус.

Параметры c_i определяются из условия того, что в заданных точках (x_i, y_i) должны быть заданные значения Z_i , то есть необходимо решить систему уравнений

$$\sum_{j=1}^N c_j q(x_j, y_j, x_i, y_i) = Z_i \quad (8)$$

Теоретически этот метод предполагает использовать для оценки в каждой точке все имеющиеся в наличии данные, но реальные исходные файлы содержат до 3000 точек. Решение таких громоздких систем затруднительно, поэтому мы ввели возможность, применяя этот метод использовать только определенное число (задаваемое заранее) ближайших к оцениваемой точек. Кроме того это позволяет более точно учитывать локальные особенности.

3 Описание данных

Для проведения анализа использовались данные по загрязнению ^{137}Cs поверхности ФРГ, Гомельской области и г.Чернобыля. Взяты эти данные из банков данных, представленных в

работах [14, 15]. Выбор различных областей объяснялся различием их масштабов и корреляционной структуры. Подробный анализ корреляционных структур в данной работе проводиться не будет, только самый необходимый. На рисунках представлены экспериментальные семивариограммы для выбранных областей. Семивариограмма представляется следующей формулой:

$$\gamma(\vec{h}) = \frac{1}{2N(\vec{h})} \sum_{i=1}^{N(\vec{h})} [Z(p_i) - Z(p_i + \vec{h})]^2 \quad (9)$$

где $p = (x, y)$ — координаты точки, $\vec{h}$ — вектор, разделяющий точки, $N(\vec{h})$ — число пар, разделенных вектором $\vec{h}$. Подробно о свойствах семивариограмм можно посмотреть например в работах [20, 16, 21, 22].

По представленным картинкам видно, что на рассматриваемых расстояниях

1. Данные по г. Чернобылю можно считать некоррелированными, до расстояния 200м, то есть там наблюдается так называемая *nugget*-модель. На больших расстояниях рост корреляции сопровождается ростом модуля дрейфа, следовательно для них нельзя делать предположение о стационарности ([10]) исходного процесса.
2. В Гомельской области данные явно скоррелированы до расстояния 100км, а дальше могут считаться некоррелированными до расстояния 750км, где наблюдается пик корреляции, сопровождаемый заметным ростом дрейфа. Следовательно там нет стационарности, возможен тренд.
3. В ФРГ корреляция есть на всех расстояниях, то есть настоящая интринсик модель. Сильный рост на больших расстояниях явно связан с трендом в Юго-Восточном направлении.

Необработанные исходные данные по областям представлены на картинках с помощью полигонов Дирихле [19].

4 Сравнение результатов на регулярной сетке

Для дальнейшего удобства обозначим:

1. Метод обратных квадратов, как M_1 .
2. Метод мультиквадратичных уравнений — M_2 .
3. Обычный кригинг — M_3 .

Вычисления выполнялись на регулярной прямоугольной сетке 40x40. Вычисления проводились с различными параметрами методов. Результаты вычислений представлены на рисунках. По ним сразу видно, что результаты различаются, но не понятно какой из методов даст более достоверные результаты.

Было показано [14], что для оценки источника (общее количество загрязняющей активности) различается для разных методов не более, чем на 20%. То есть оценку общего выброса можно сделать самым простым способом, а для распределения загрязнения (карты прогноза загрязнения) метод нужно выбирать более аккуратно.

Некоторые выводы, не по выбору метода, а скорее по выяснению областей наиболее сложных для оценки можно сделать используя карты взаимных разностей методов. Поскольку вычисления всеми методами проводились в одних и тех же точках можно посчитать в этих точках значения $est(M_j, x_i, y_i) - est(M_k, x_i, y_i), j \neq k$, где M_j, M_k означают различные методы, а x_i, y_i — точку оценки. Результаты таких расчетов представлены на рисунках. Очевидно, что в областях, где все методы дают схожие результаты ($|\Delta| < 2$), можно предполагать, что оценка близка к реальности. Но там где расхождения между методами более существенны трудно выбрать наиболее достоверную оценку и требуется более тщательный анализ и данных, и методов и расположения данных (сети мониторинга).

Если сравнить представленные карты разностей, то видно, что наибольшие расхождения методов наблюдаются в регионах с более резкими изменениями исходных значений (Юго-Восточный участок ФРГ), с повышенной плотностью исходных точек (кластерные участки в Гомельской области). На ровных же участках с более равномерным распределением точек различия гораздо меньше.

Карты разностей позволяют также определить взаимное соотношение методов, а именно какой из методов дает значения больше/меньше, чем другой и в каких это происходит областях. Это можно посмотреть на представленных рисунках.

Если сравнивать методы интегрально по всем исследовавшимся областям, то можно привести следующие результаты:

1. $est(M_1) \leq est(M_2)$ 1891 раз, из них при $|\Delta| > 5$ 128 раз, с другой стороны $est(M_1) > est(M_2)$ 2906 раз, из них при $|\Delta| > 5$ 71 раз.
2. $est(M_2) \leq est(M_3)$ 2536 раз, из них при $|\Delta| > 5$ 4 раза, тогда как $est(M_2) > est(M_3)$ 2261 раз, из них при $|\Delta| > 5$ 38.
3. $est(M_1) \leq est(M_3)$ 1873 раза, из них при $|\Delta| > 5$ 84, а $est(M_1) > est(M_3)$ 2924 раза, из них при $|\Delta| > 5$ 137.

Видно, что представление карт прогноза, просто посчитанных на регулярной прямоугольной (или любой другой) сетке, либо представленных изолиниями не дает достаточной информации о степени достоверности полученных результатов, о предпочтительности какого-либо метода и его параметров.

Итак, нельзя взять данные и сразу использовать интерполятор, а необходимо провести предварительный анализ.

5 Кросс-валидация и выбор метода

Поскольку значения оцениваемой функции известны нам только для заданного, используемого для оценки набора точек, то сравнение степени соответствия прогноза реальным данным для различных методов нам остается проводить на основе этих самых точек. Такая процедура носит название кросс-валидация и используется геостатистиками для проверки пригодности выбранной модели вариограммы [16].

Выполняется кросс-валидация следующим образом:

1. Из базы данных временно изымается первая точка и проводится оценка значения в ней с использованием всех остальных данных.
2. Полученное значение сравнивается с известным и считаются относительная ошибка и абсолютное отклонение.
3. Первые два шага проводятся для всех точек базы данных.

Относительная ошибка в пункте 2 может считаться по-разному, в данной работе использовалась формула, предложенная в [13]

$$\text{ошибка} = 100 \frac{\text{оцененное значение} - \text{заданное значение}}{\text{заданное значение}} \quad (10)$$

Представлены карты ошибок (на полигонах Дирихле) для различных методов. Эти карты дают точное представление в каких областях метод дает более точные значения. Сравнивая карты различных методов можно оценить, какой метод лучше для какой области. Наиболее четко видны области больших ошибок для ФРГ. Все методы в большей или меньшей степени дают плохие результаты для области резкого изменения значений, смены модели процесса, хотя в самой Юго-Восточной части результаты опять становятся приемлемыми.

Можно строить такие же карты для абсолютного отклонения $\Delta(p) = Z_{est}(p) - Z_{mes}(p)$. По таким картам труднее определить точность метода, так как расхождение может быть зрительно не большим, но оказаться больше значения в данной точке. Поэтому мы таких карт не представляем.

Кроме того легко определять общую применимость метода, особенно полезно при выборе параметров, по представлению результатов кросс-валидации в виде графика — $Z_{est}(p) = F(Z_{mes}(p))$ или аналогичного ему — $\Delta(p) = F(Z_{mes}(p))$. Проведение на графике биссектрисы (или соответственно прямой $F = 0 \forall p$), соответствующей равенству оценки и исходного значения, позволяет видеть характер отклонений, большее отклонение при больших или меньших значениях, какие либо тренды в поведении оценки и т.п. Примеры таких графиков приведены на рисунках. Легко видеть, как влияют параметры (радиус поиска и число точек) на результаты методов обратных квадратов и мультиквадратичных уравнений в Чернобыле и Гомельской области. При больших значениях оценки стремятся сравняться со средним значением. В ФРГ такого не заметно. Если посмотреть на вариограммы, построенные для этих регионов, то видно, что такое поведение оценки появляется, когда радиус поиска становится больше радиуса корреляции, получаемого при анализе корреляционной структуры. Таким образом для выбора оптимальных параметров этих методов полезно предварительно провести корреляционный анализ.

Кроме вычисления относительной ошибки в каждой точке можно вычислить глобальные характеристики метода по результатам кросс-валидации [3]

1. Сдвиг среднего значения $\Delta m = m_{est} - m_{mes}$, где m_{mes} — среднее, оцененное по исходным данным, m_{est} — среднее, оцененное по полученным результатам.

2. Сумма квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^N (Z_{est}(p_i) - Z_{mes}(p_i))^2 \quad (11)$$

3. Коэффициент эффективности

$$E = 1 - \frac{S}{S_0} \quad (12)$$

где

$$S_0 = \sum_{i=1}^N (Z_{mes}(p_i) - m_{mes})^2$$

Результаты оценки глобальных параметров представлены в таблице:

Область	метод	S	E	Δm
ФРГ	M_1	5525.9	0.747	-0.03
	M_3	5595.7	0.745	0.04
	M_2	5785.5	0.735	0.18
Гомель.обл.	M_1	10722.4	0.7	-0.01
	M_3	10432.5	0.7	0.03
	M_2	12028.	0.67	0.13
Черноб.	M_1	12563.	-0.04	-0.08
	M_3	12887	-0.07	-0.04
	M_2	13294.	-0.1	0.25

Проведенный анализ показал, что для использовавшихся данных несколько хуже по сравнению с другими работает метод мультиквадратичных уравнений, но это вовсе не означает, что так будет всегда. Метод обратных квадратов с правильно подобранными параметрами и обычный кригинг дают приемлемые результаты, но это опять же не означает, что так будет с любыми данными. Например в случае с анизотропией или в другом более сложном случае.

Кроме анализа и сравнения характеристик, связанных с точностью методов, кросс-валидация дает возможность провести анализ и получающихся расхождений $\Delta(p)$. Очевидно, что для того, чтобы метод можно было безопасно использовать, его расхождения должны быть независимы, то есть не влиять одно на другое, иначе при вычислении на сетке может возникнуть их неконтролируемый рост. Кроме того функция распределения расхождений должна быть Гауссовой со средним равным 0. Чтобы проверить это надо провести статистический и корреляционный анализ.

Результаты статистического анализа $\Delta(p)$ приведены в таблице:

область	метод	среднее	вариация	асимм.	эксцесс
ФРГ	M_1	0.04	4.4	-1.3	8.75
	M_3	0.02	4.42	-1.09	8.33
	M_2	-0.17	4.5	-1.29	9.23
Гомель.обл.	M_1	0.01	4.27	-1.12	18.12
	M_3	0.02	4.19	-1.26	17.26
	M_2	-0.13	4.51	-2.22	29.15
Черноб.	M_1	0.08	5.14	-0.5	3.83
	M_3	0.05	5.21	-0.41	4.2
	M_2	-0.24	5.28	-0.34	4.25

Проведен для $\Delta(p)$ и корреляционный анализ, построены вариограммы, с предположением, что нет зависимости от направления. Полученные вариограммы представлены на рисунках.

Можно сделать некоторые выводы:

1. Несмотря на неплохие результаты статистического анализа отклонений для г.Чернобыля все методы дают заметный рост корреляции отклонений, а значит их использование сомнительно, хотя и возможно с очень маленьким радиусом поиска.
2. Отклонения по Гомельской области можно считать некоррелированными для всех исследовавшихся методов. По статистическим оценкам лучше выбрать обратные квадраты или кригинг. Следует заметить, что метод обратных квадратов для анализа ошибок был выбран с радиусом поиска лучшим по предыдущему анализу методов.
3. Отклонения в ФРГ могут считаться некоррелированными только на незначительном участке. Но поскольку это именно для тех расстояний, которым равен наш радиус поиска, то для ФРГ такие оценки можно считать пригодными. Статистические оценки лучше всего дал кригинг.

Таким образом мы не предлагаем какой-либо метод, как неизменно лучший. Более того, мы не утверждаем, что предложенные здесь методы являются лучшими. Мы хотели показать, как выбрать из имеющихся у вас методов наиболее подходящий для оценки ваших данных.

6 Заключение

На основе результатов, полученных при сравнении методов можно сформулировать некоторый шаблон действий для выбора метода оценки конкретных данных.

1. Провести, хотя бы минимальный корреляционный анализ данных, чтобы установить
 - (1) Скоррелированы ли данные?
 - (2) Присутствует ли тренд?
 - (3) Можно ли считать данные изотропными?
 - (4) Если есть корреляция, то есть ли выход на "порог". Есть ли расстояние после которого нет корреляции (радиус корреляции)?
 - (5) Можно ли выделить достаточно большие диапазоны расстояний, для которых корреляцию легко моделировать?

Такой анализ позволяет ориентировочно выбрать радиус поиска, если метод имеет такой параметр. Его лучше всего брать равным радиусу корреляции, если он есть. Если есть корреляция, но не определен радиус корреляции хорошо брать $\frac{2}{3}$ от максимального расстояния, если корреляции нет — $\frac{1}{3}$.

2. Провести кросс-валидацию предполагаемых методов или метода с различными параметрами. Провести анализ результатов и анализ ошибок.
3. Использовать для оценки метод, давший лучшие результаты в предыдущем пункте. С его помощью строить карты для принятия решений.

Литература

- [1] R.Franke. Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods. Mathematics of Computation, V.38, No.157, 1982, pp.181-200.
- [2] E.J.Englund. A Variance of Geostatisticians. Mathematical Geology. V.22, No.4, 1990, pp.417-455.
- [3] G.Q.Tabios, J.D.Salas. A Comparative Analysis for Spatial Interpolation of Precipitation. Water Resources Bulletin, V.21, No.3, 1985, pp.365-380.
- [4] A.Venkertram. On the use of kriging in the spatial analysis of acid precipitation Data. Atmospheric Environment, V.22, 1988, pp.1963-1975.
- [5] J.M.Rendu. Normal and Lognormal estimation. Mathematical Geology, V.11, 1979, pp.407-422.
- [6] A.G.Journal. Nonparametric estimation of spatial distributions. Mathematical Geology. V.15, 1983, pp.445-468.
- [7] V.V.Fedorov. Kriging and other estimators of spatial field characteristics (with spacial reference to environmental studies). Atmospheric Environment, V.23, 1989, pp.175-184.
- [8] T.C.Haas. Lognormal and moving window methods of estimating acid depositions. Journal of American Statistical Association, V.14, 1990, pp.950-963.
- [9] R.L.Hardy. Multiquadric equations of topology and other irregular surfaces. Journal of Geophysical Research, V.76, 1971, pp.1905-1915.
- [10] C.Deutsch, A.G.Journal. GSLIB. Geostatistical Software Library and User's Guide. Oxford University Press. 1992, 340p.
- [11] D.Weber, E.Englund. Evaluation and Comparison of Spatial Interpolators. Mathematical Geology, V.24, No.4, 1992, pp.381-391.
- [12] N.Cressie. The Origins of Kriging. Mathematical Geology, V.22, No.3, 1990, pp.239-252.
- [13] J.W.Grimm, J.A.Lynch. Statistical analysis of error in estimating wet deposition using five surface estimation algorithms. Atmospheric Environment, V.25A, 1991, pp.317-327.
- [14] M.Kanevsky, R.V.Arutyunyan, L.A.Bolshov, I.I.Linge, E.Savel'eva, T.Haas. Spatial Data Analysis of Chernobyl Fallout. 1.Preliminary Results. Preprint NSI-23-93. Moscow: Nuclear Safety Institute, September 1993, 91p.
- [15] M.de Cort, G.Graziani, F.Raes, D.Stanners, G.Grippa, I.Ricapito. Radioactivity Measurements in Europe after the Chernobyl Accident. EUR-12800 EN, 1990, 165p.
- [16] M.David. Handbook of Applied Advanced Geostatistical Ore Reserve Estimation. Elsevier Science Publishers, Amsterdam B.V., 1988, 216p.
- [17] J.R.Carr, K.R.Roberts. Application of Universal Kriging for Estimation of Earthquake Ground Motion: Statistical Significance of Results. Mathematical Geology, V.21, No.2, 1989, pp.255-265.
- [18] R.P.Brent. Algorithms for Minimization Without Derivatives. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall Inc., 1973.
- [19] F.P.Preparata, M.I.Shamos. Computational Geometry. Springer-Verlag, N.Y., 1985, pp.198-218.
- [20] D.E.Myers. Pseudo-Cross Variograms, Positive-Definiteness and cokriging. Mathematical Geology, V.23, 1991, pp.805-816.
- [21] M.Armstrong. Common Problems Seen in Variograms. Mathematical Geology, V.16, No.3, 1984, pp.305-313.
- [22] R.J.Barnes. The Variogram Sill and the Sample Variance. Mathematical Geology, V.23, No.4, 1991, pp.673-678.

7 Приложение. Рисунки 1-63

Исходные данные и экспериментальные семивариограммы

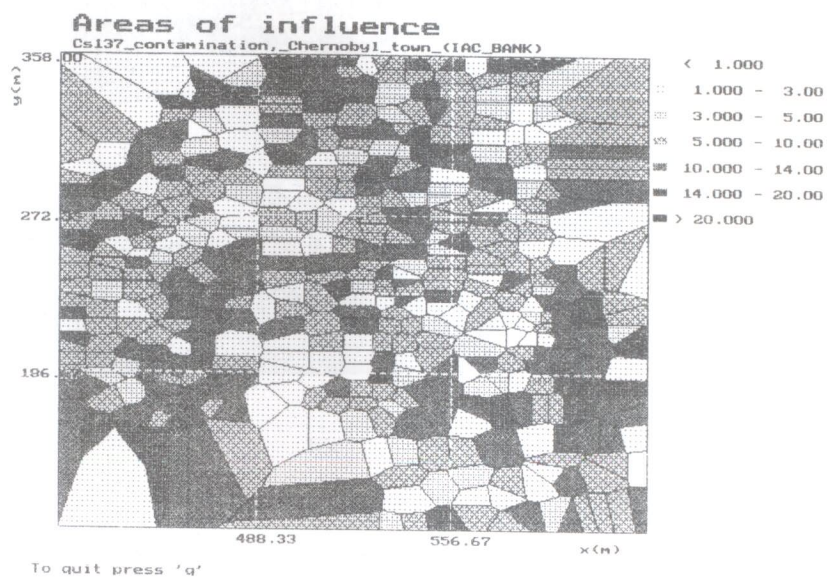


Рис. 1: Исходные данные, г.Чернобыль

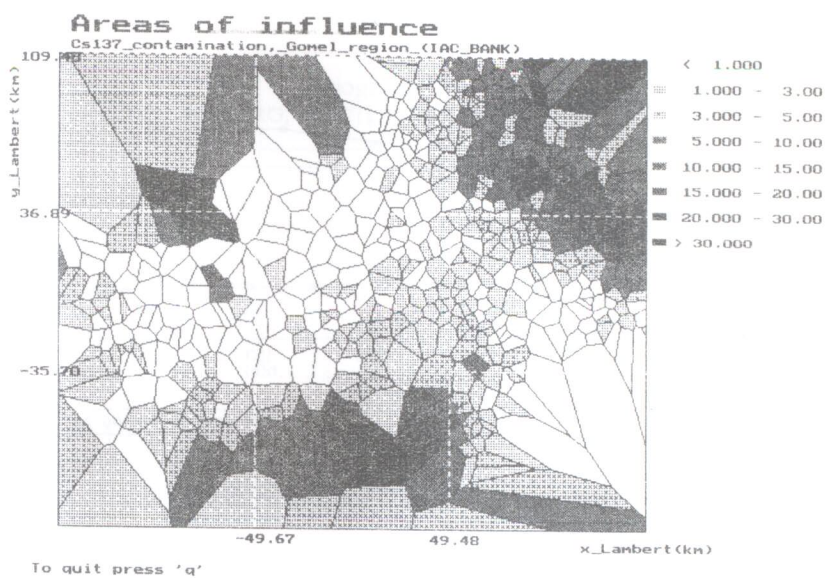


Рис. 2: Исходные данные, Гомельская область

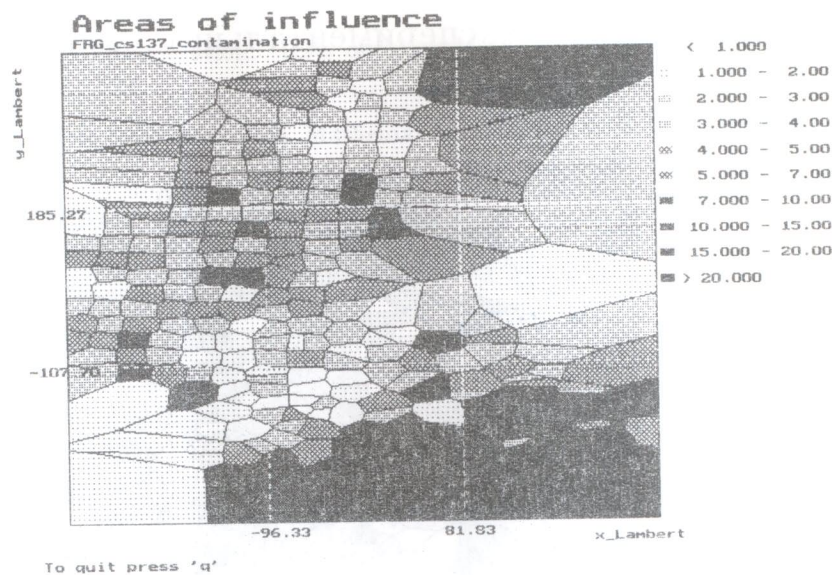


Рис. 3: Исходные данные, ФРГ

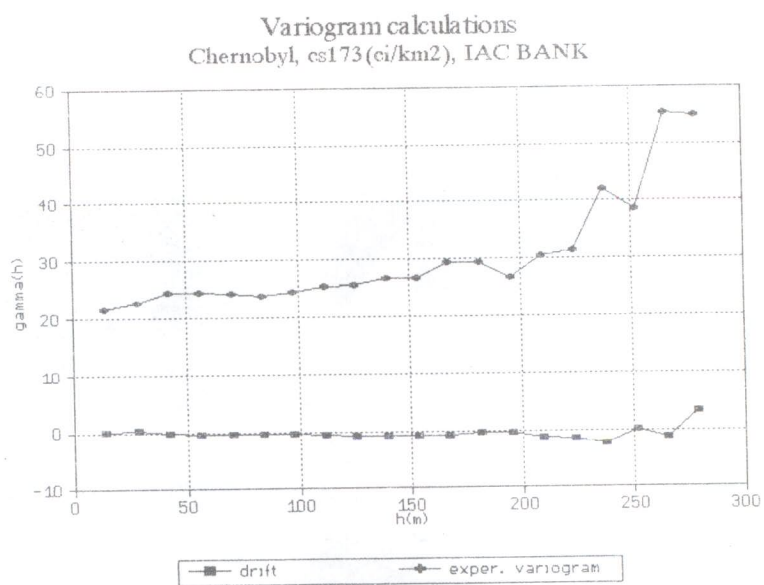


Рис. 4: Экспериментальная семивариограмма для г. Чернобыля

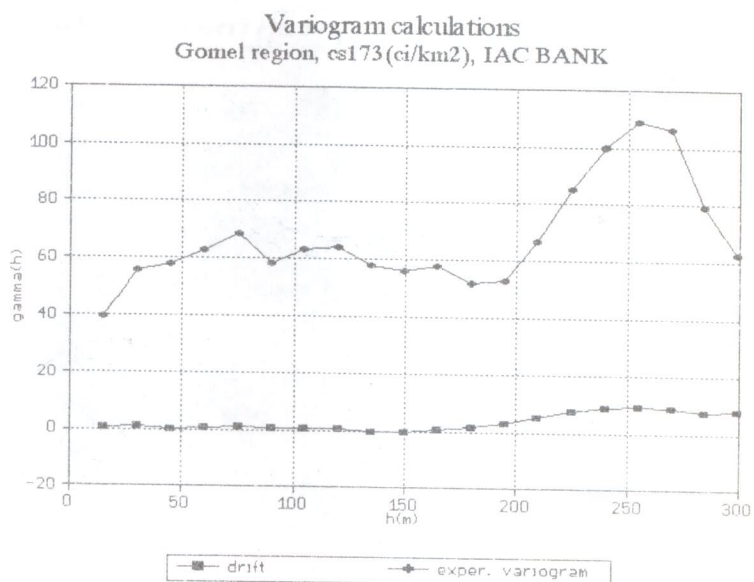


Рис. 5: Экспериментальная семивариограмма для Гомельской области

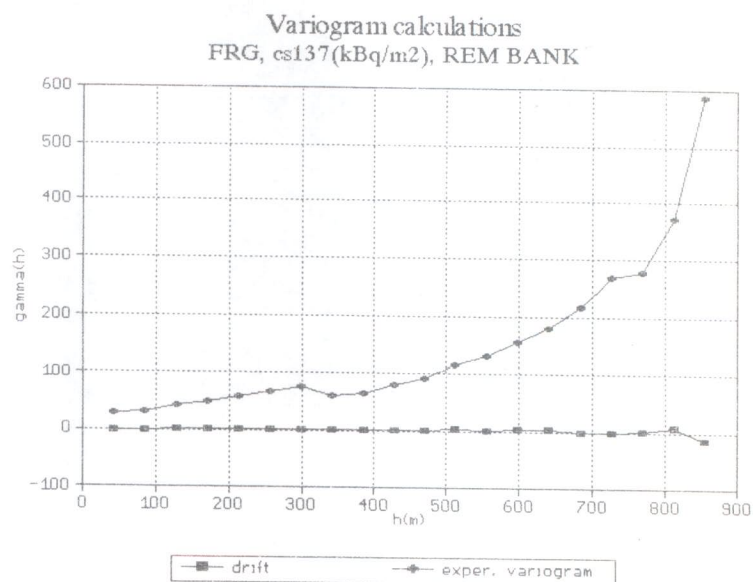


Рис. 6: Экспериментальная семивариограмма для ФРГ

Результаты использования интерполяторов на регулярной сетке

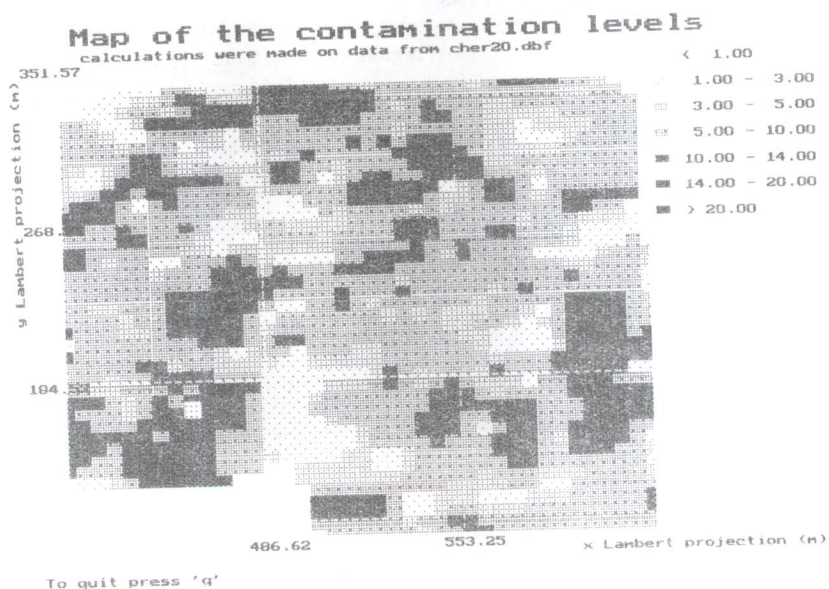


Рис. 7: Г.Чернобыль, обратные квадраты, радиус поиска - 20м

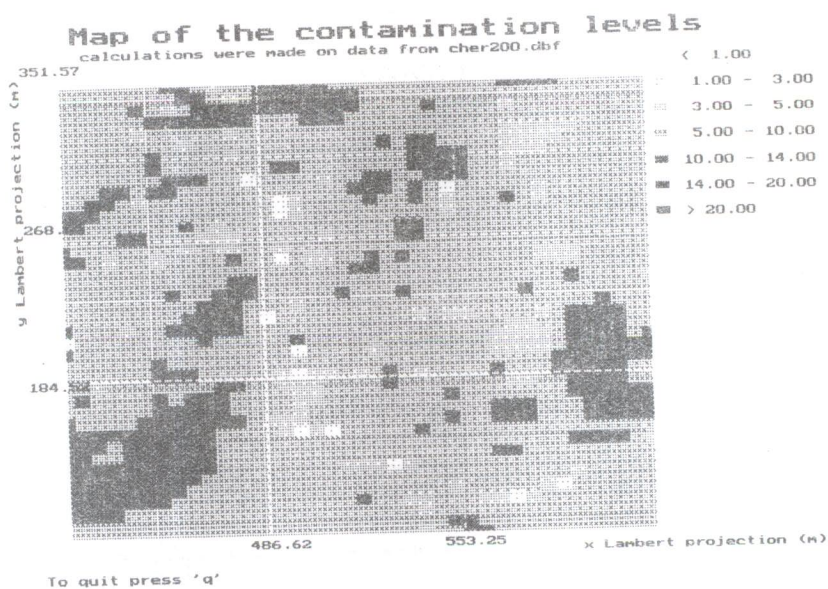


Рис. 8: Г.Чернобыль, обратные квадраты, радиус поиска - 200м

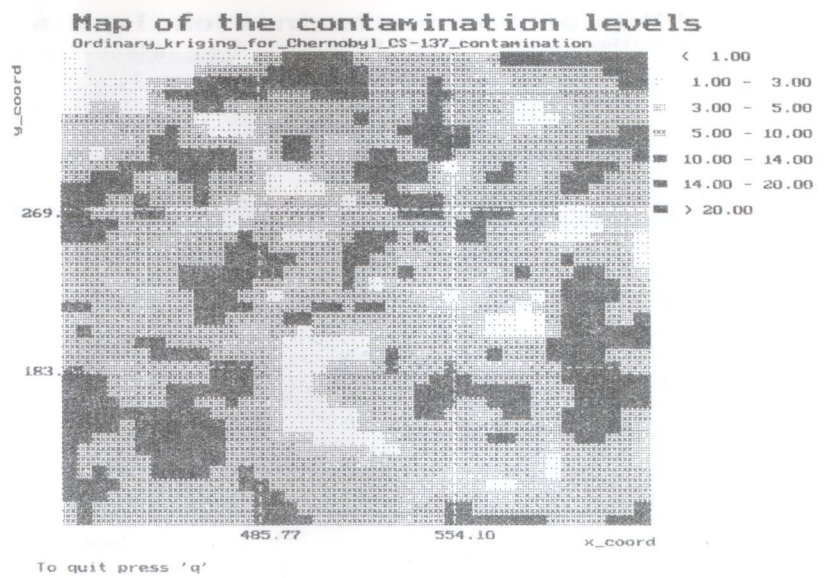


Рис. 9: Г.Чернобыль, обычный кригинг

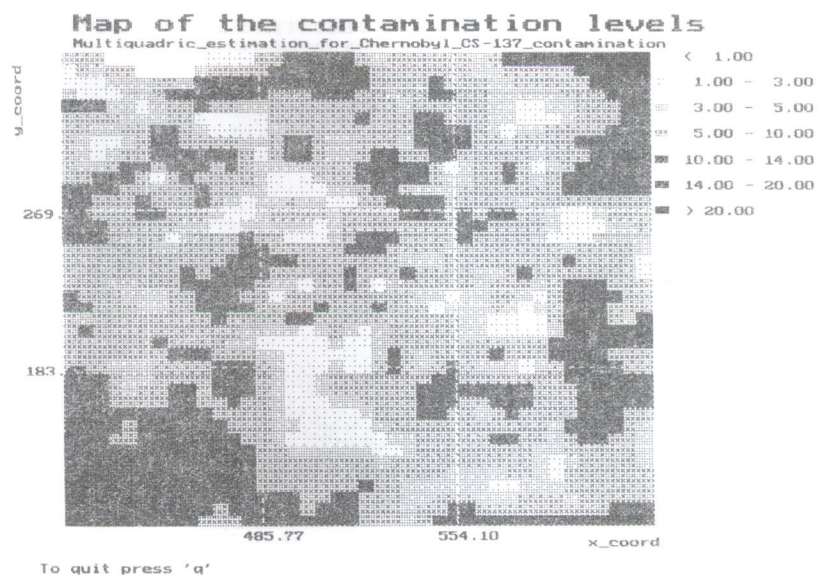


Рис. 10: Г.Чернобыль, мультиквадратичные уравнения, учитываются 10 соседей

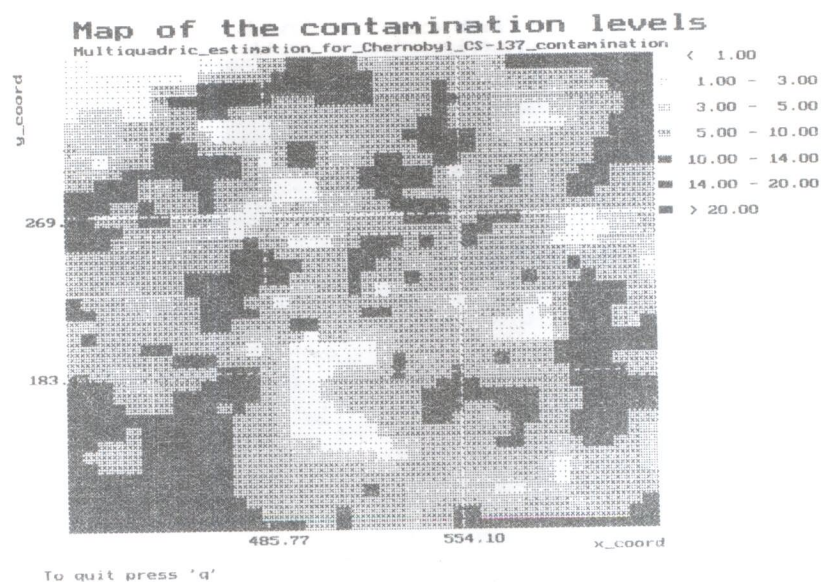


Рис. 11: Г.Чернобыль, мультиквадратичные уравнения, учитываются 60 соседей

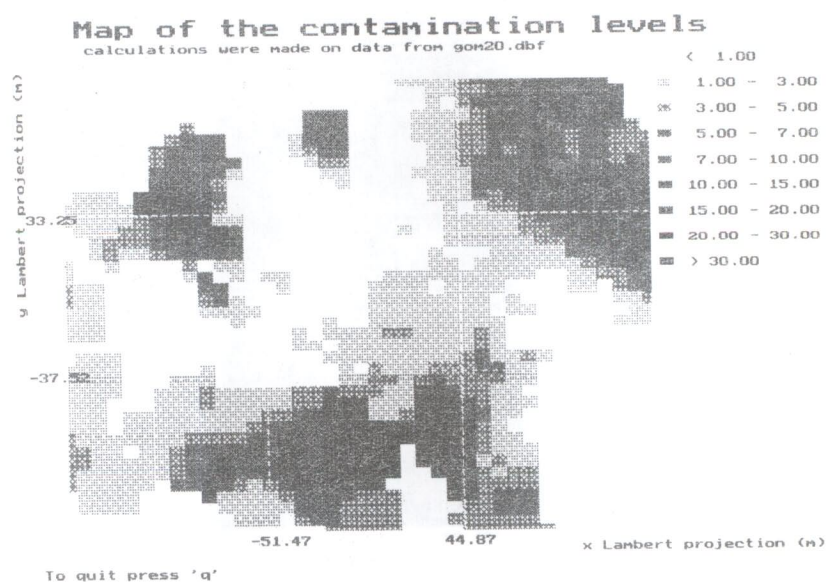


Рис. 12: Гомельская обл., обратные квадраты, радиус поиска - 20км

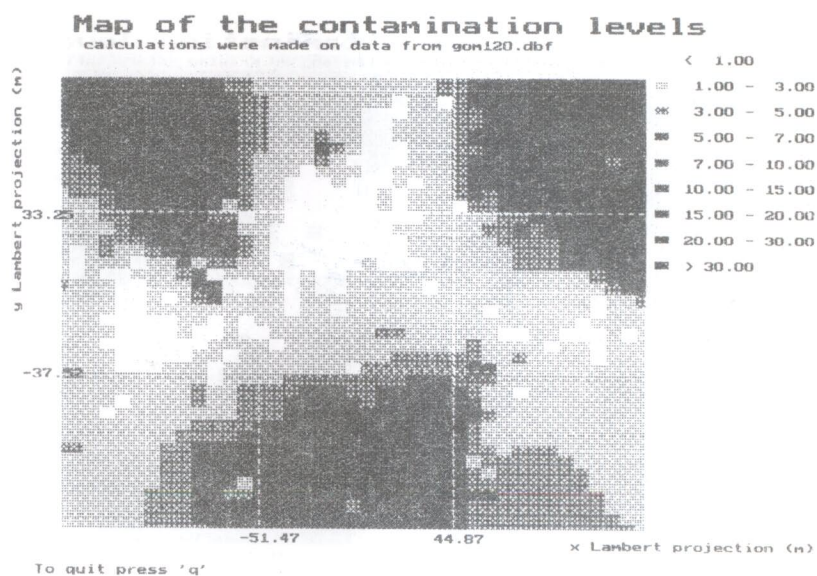


Рис. 13: Гомельская обл., обратные квадраты, радиус поиска - 120км

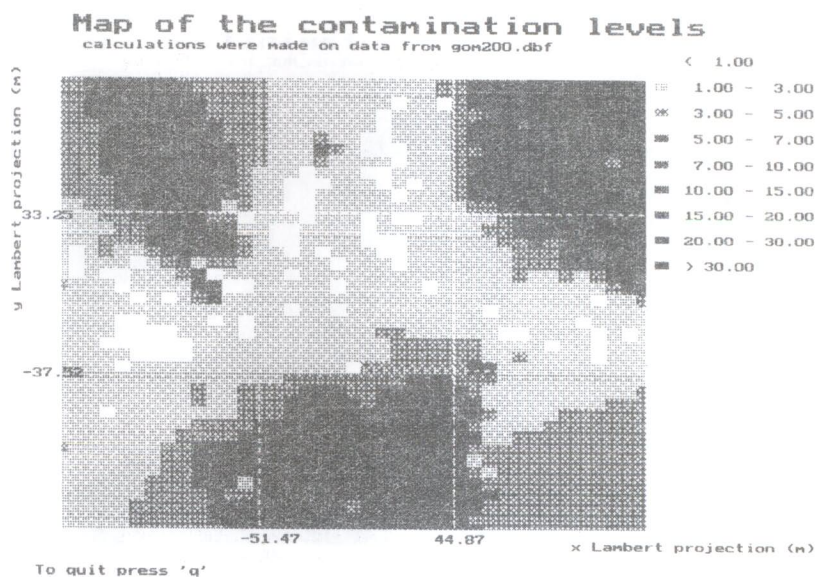


Рис. 14: Гомельская обл., обратные квадраты, радиус поиска - 200км

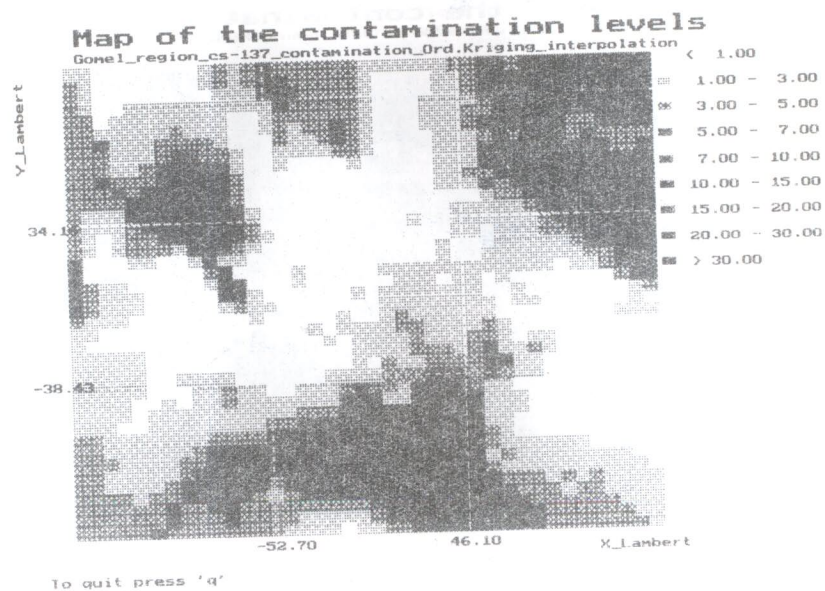


Рис. 15: Гомельская обл., обычный кригинг

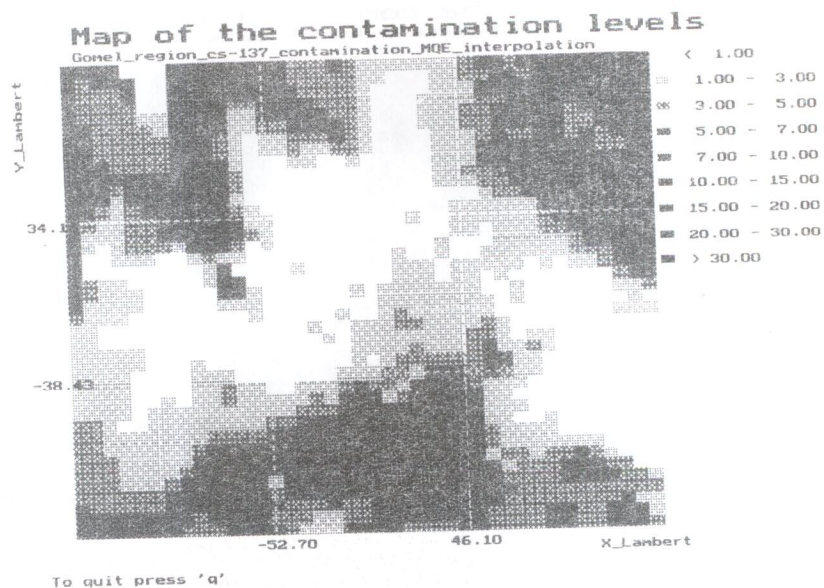


Рис. 16: Гомельская обл., мультиквадратичные уравнения, учитывается 10 соседей

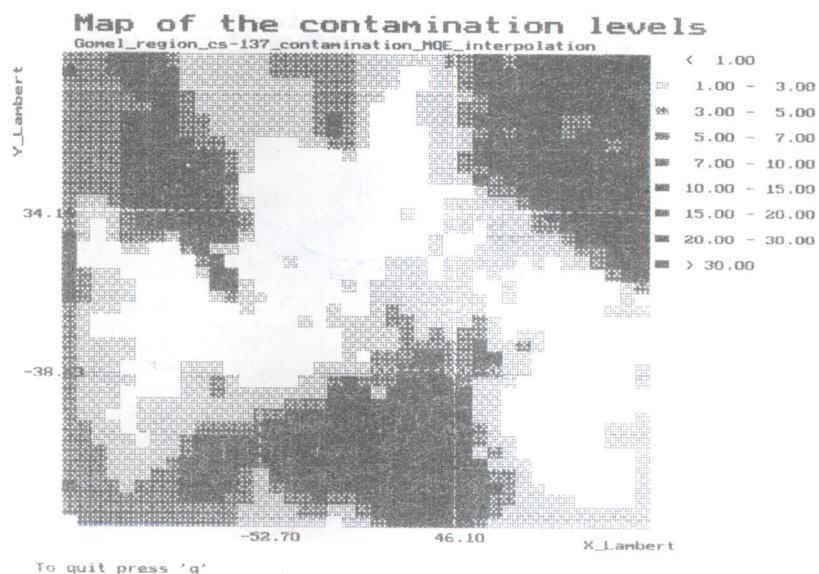


Рис. 17: Гомельская обл., мультиквадратичные уравнения, учитываются 60 соседей

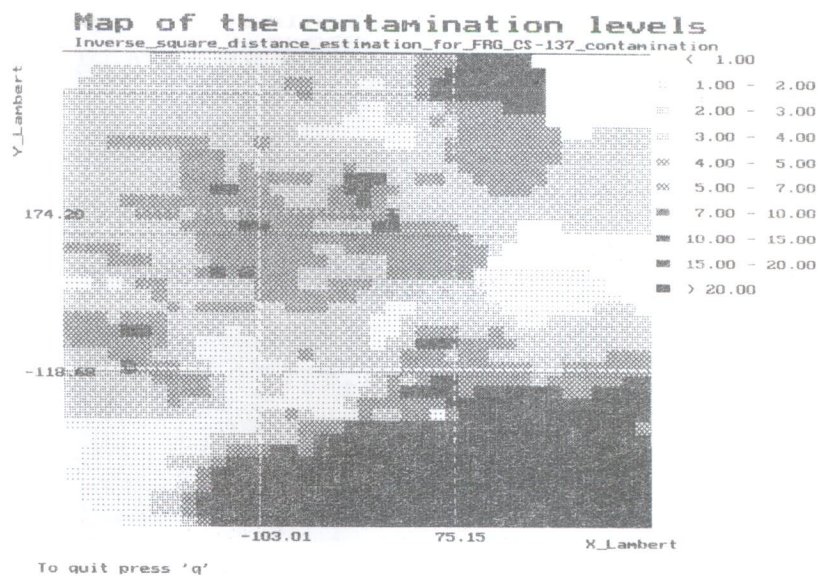


Рис. 18: ФРГ, обратные квадраты, радиус поиска - 100км

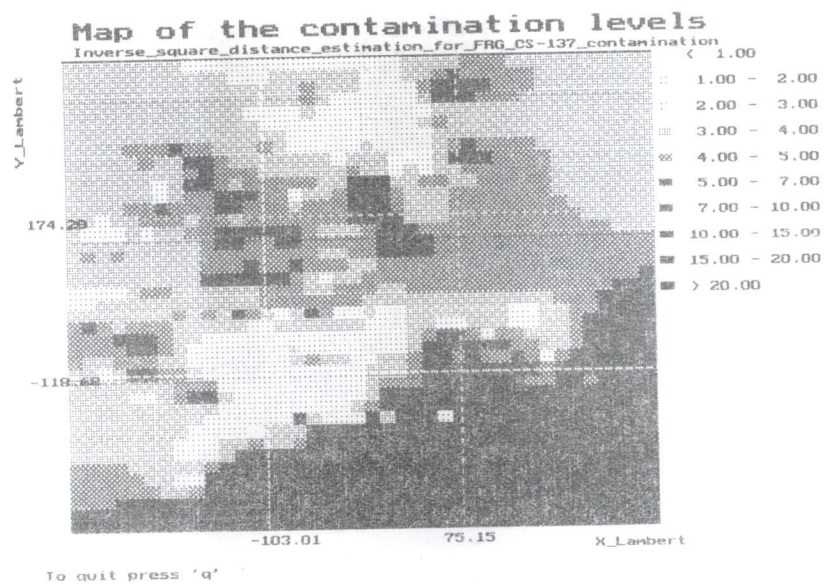


Рис. 19: ФРГ, обратные квадраты, радиус поиска - 400км

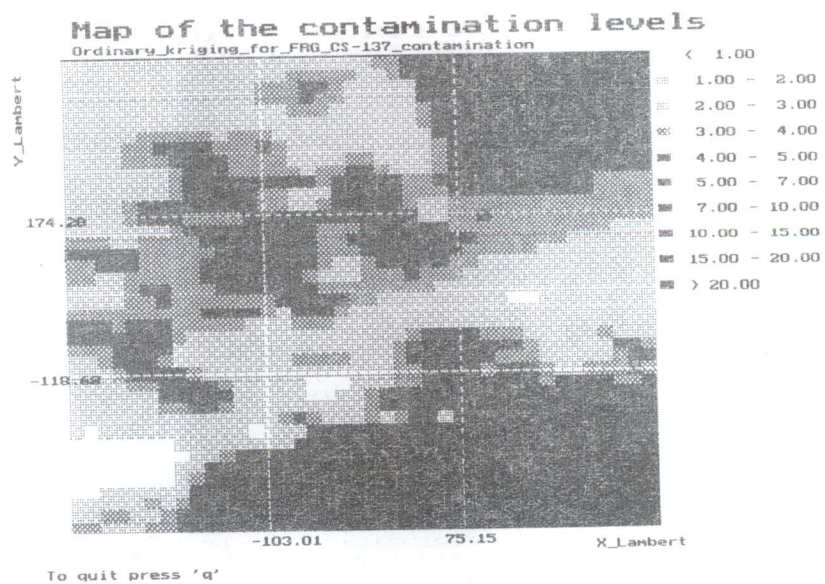


Рис. 20: ФРГ, обычный кригинг

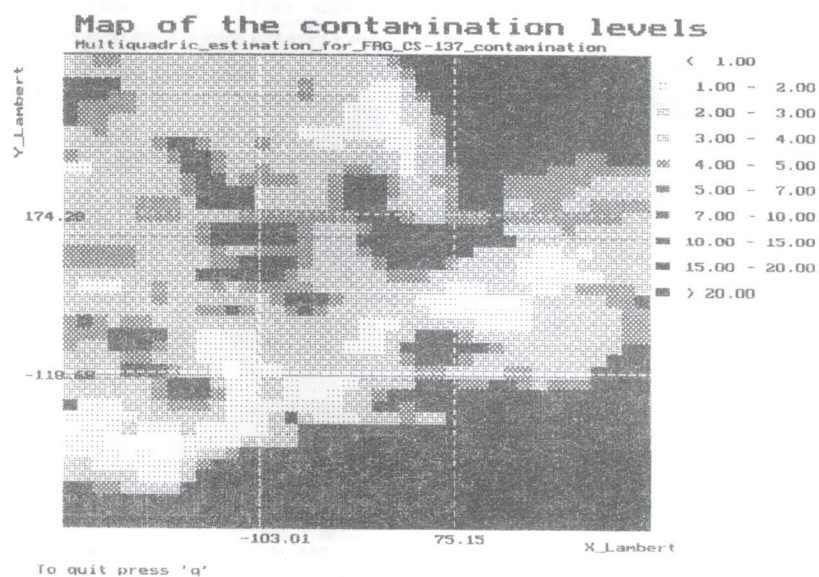


Рис. 21: ФРГ, мультиквадратичные уравнения, учитываются 10 соседей

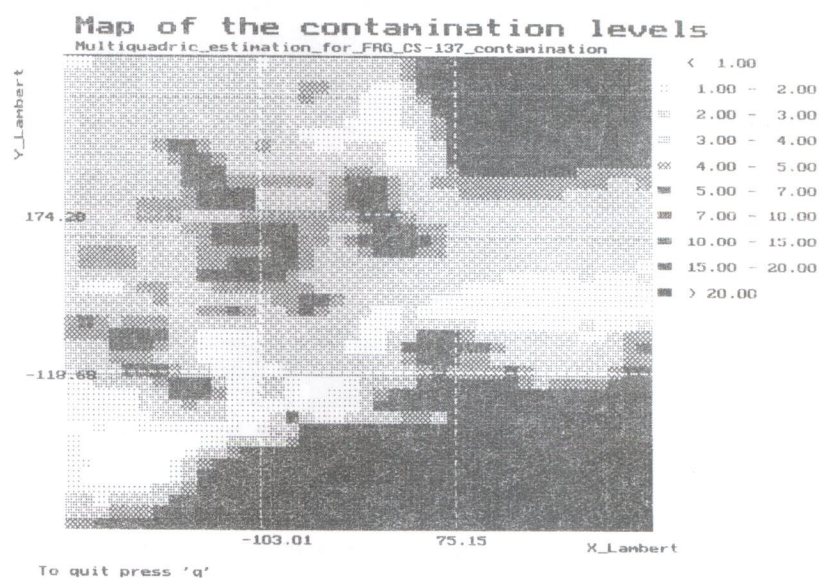


Рис. 22: ФРГ, мультиквадратичные уравнения, учитываются 60 соседей

Карты разностей

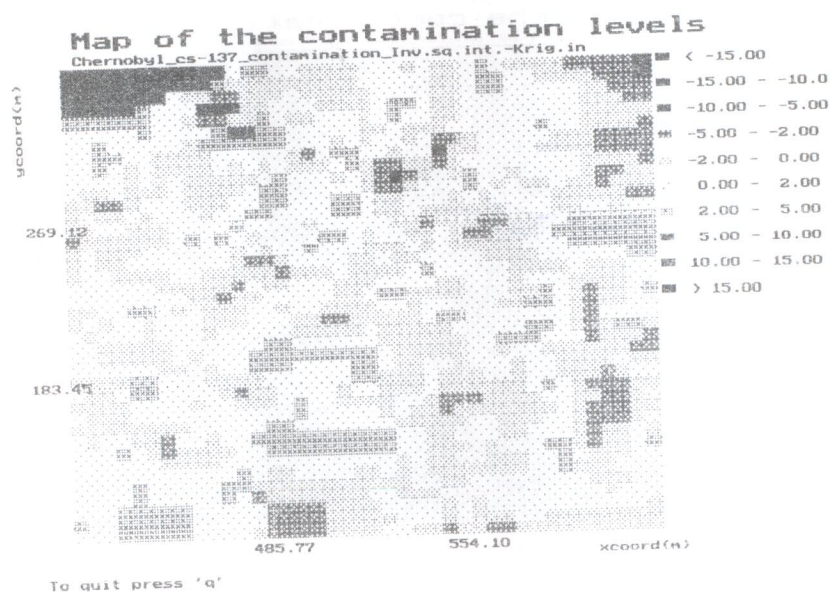


Рис. 23: Г.Чернобыль, разности значений полученных обратными квадратами и обычным кригингом

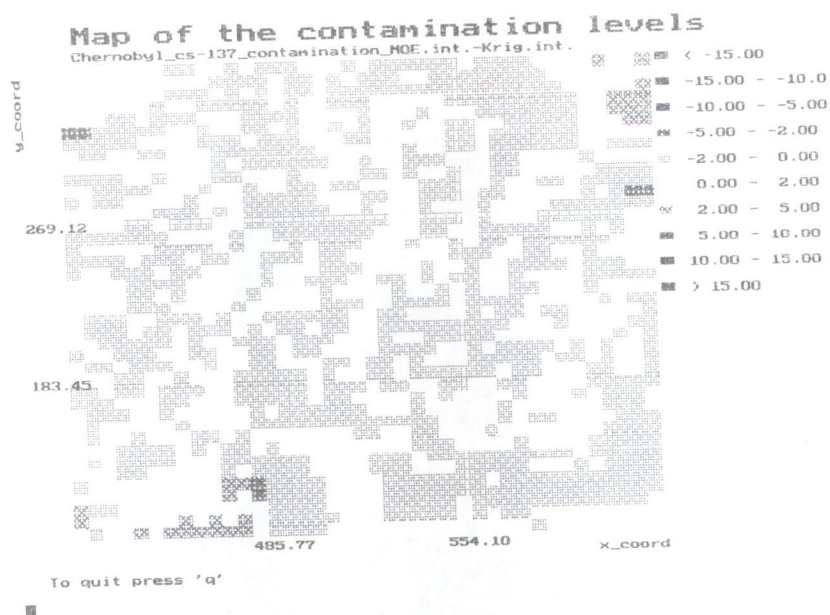


Рис. 24: Г.Чернобыль, разности значений полученных мультиквадратичными уравнениями и обычным кригингом

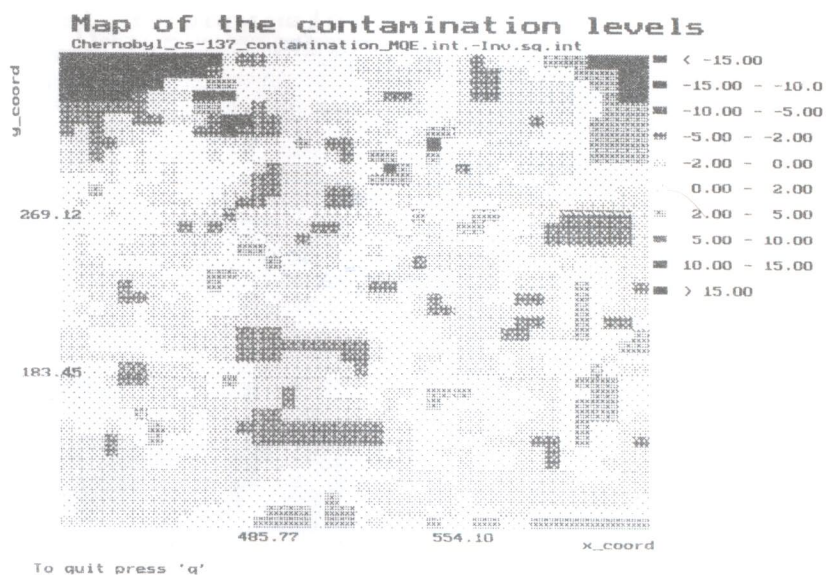


Рис. 25: Г.Чернобыль, разности значений полученных мультквадратичными уравнениями и обратными квадратами

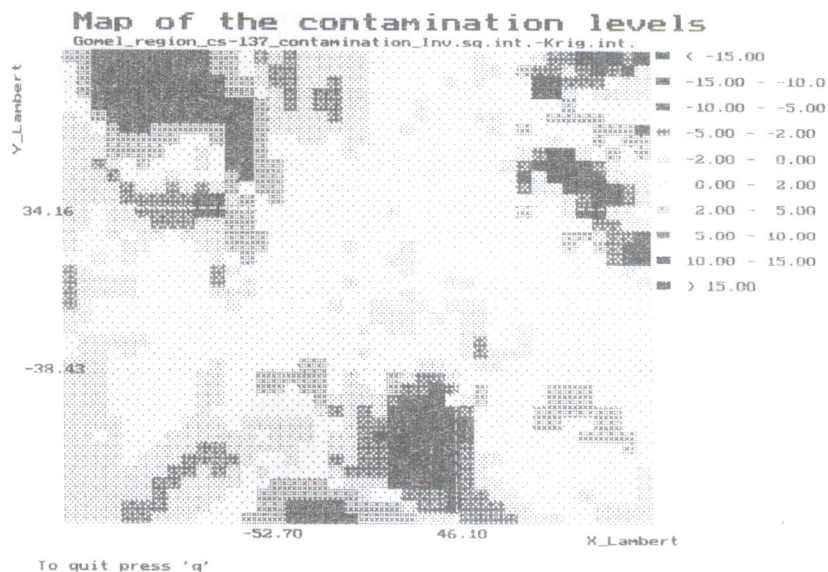


Рис. 26: Гомельская обл., разности значений полученных обратными квадратами и обычным кригингом

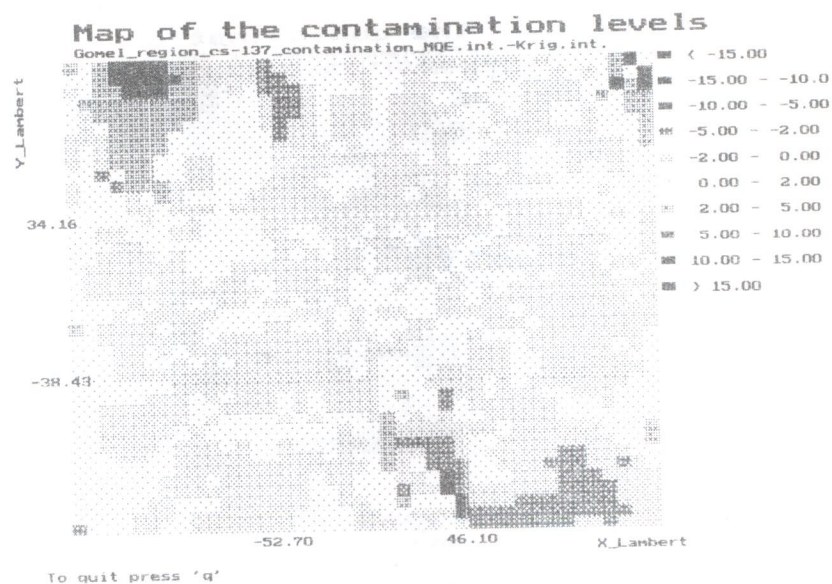


Рис. 27: Гомельская обл., разности значений полученных мультиквадратичными уравнениями и обычным кригингом

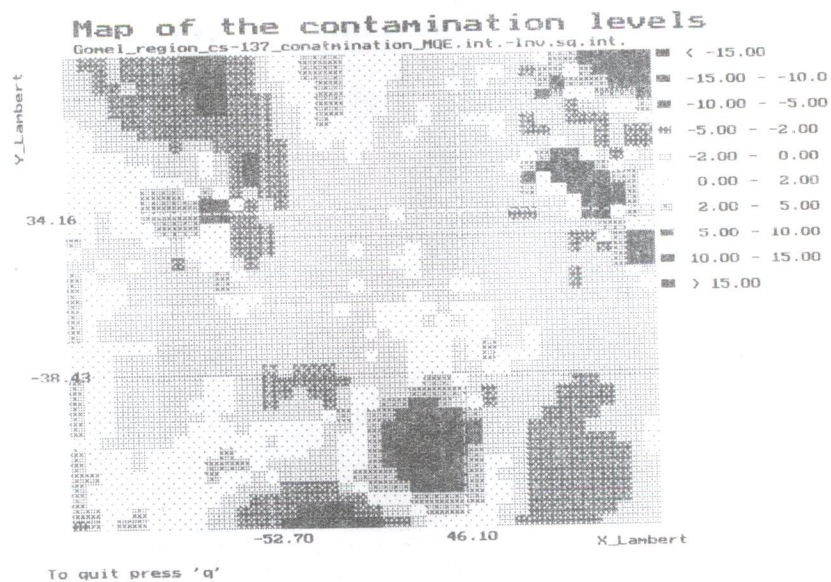


Рис. 28: Гомельская обл., разности значений полученных мультиквадратичными уравнениями и обратными квадратами

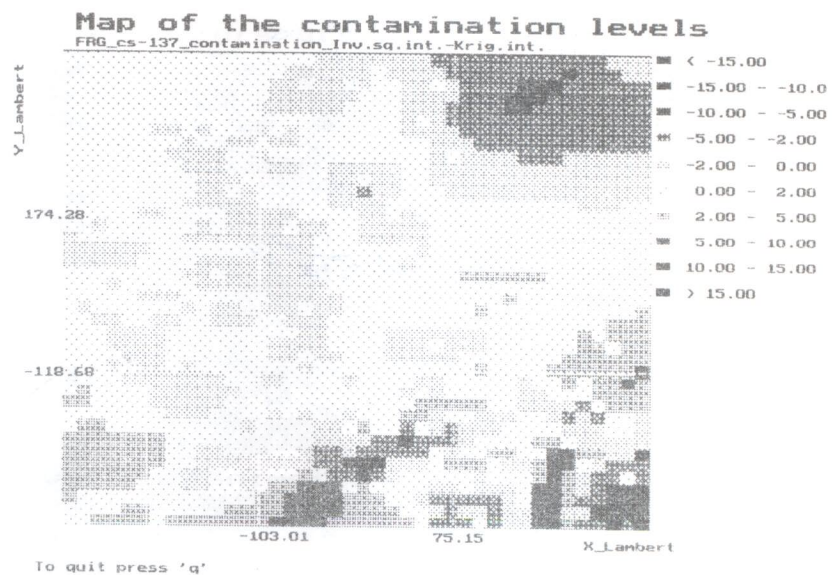


Рис. 29: ФРГ, разности значений полученных обратными квадратами и обычным кригингом

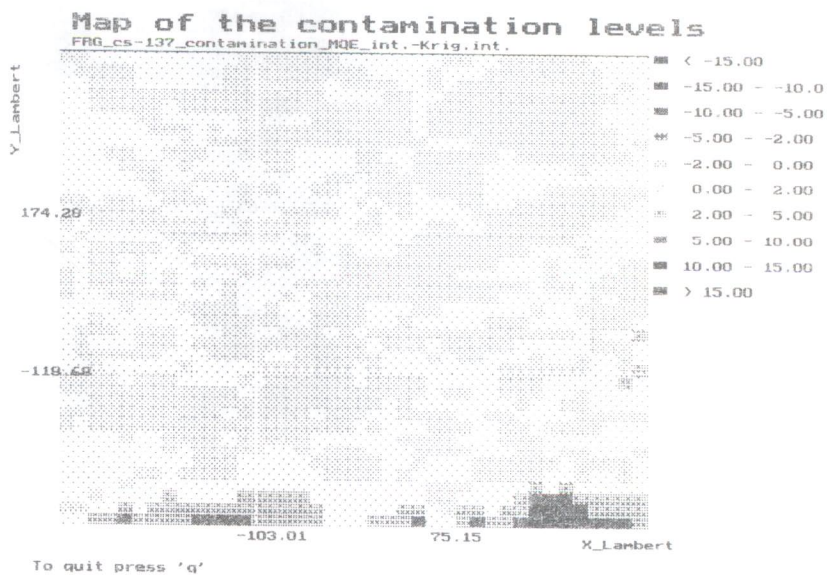


Рис. 30: ФРГ, разности значений полученных мультикватричными уравнениями и обычным кригингом

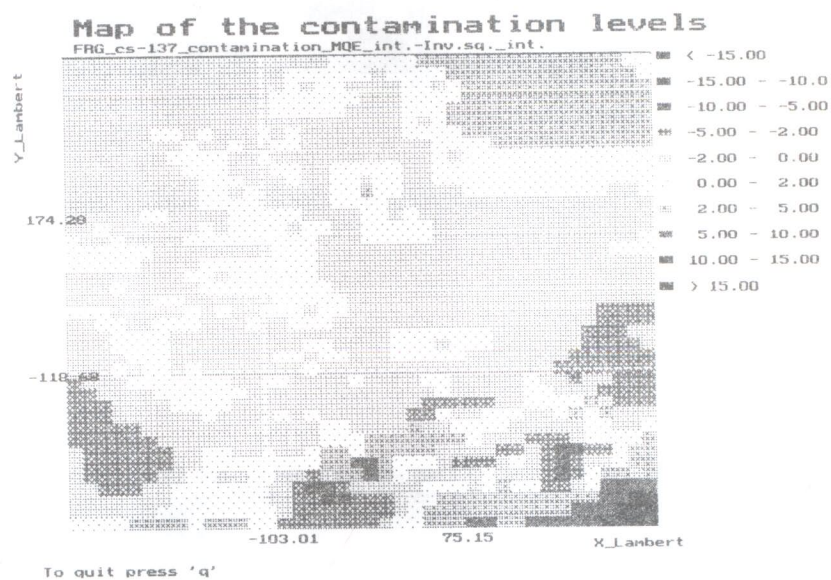


Рис. 31: ФРГ, разности значений полученных мультиквадратичными уравнениями и обратными квадратами

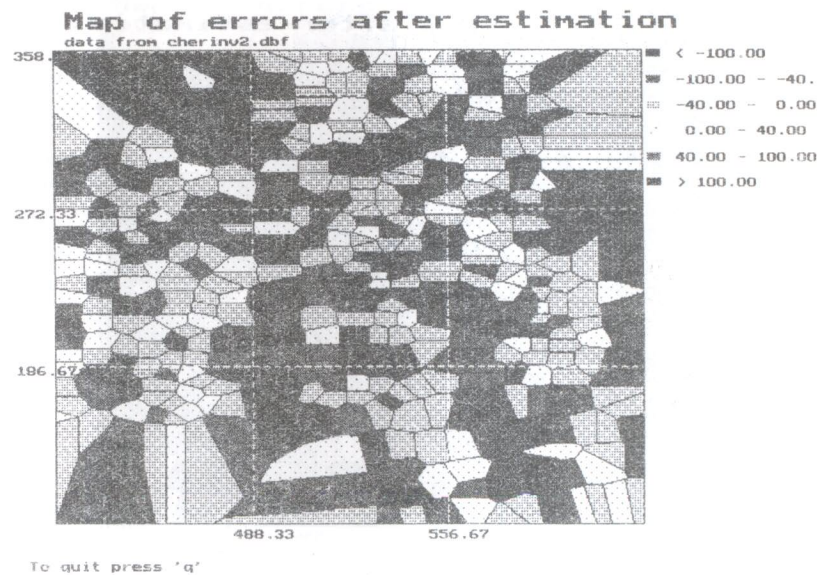


Рис. 32: Г.Чернобыль, обратные квадраты

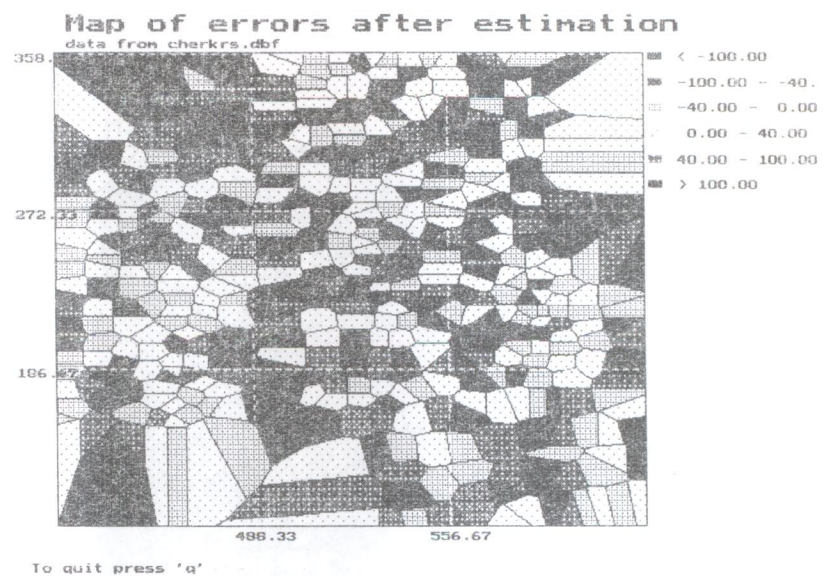


Рис. 33: Г.Чернобыль, обычный кригинг

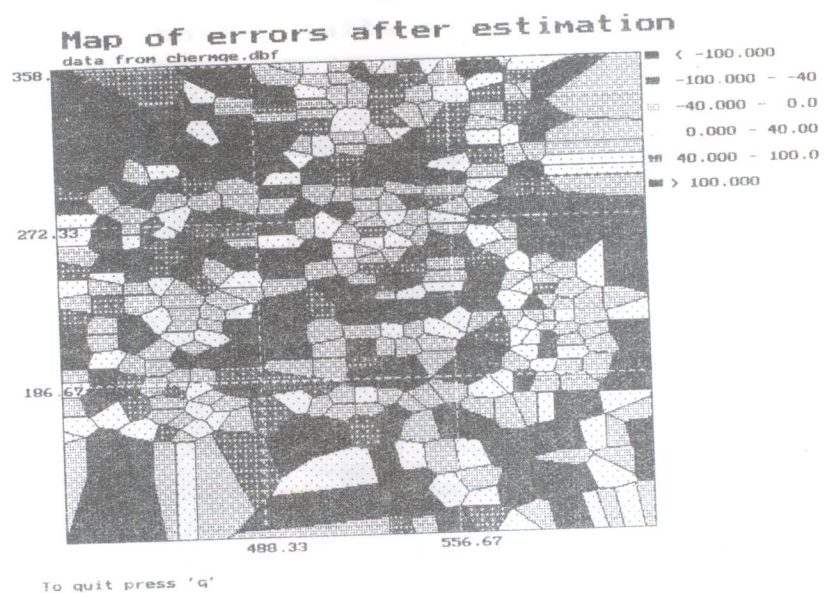


Рис. 34: Г.Чернобыль, мультиквадратичные уравнения

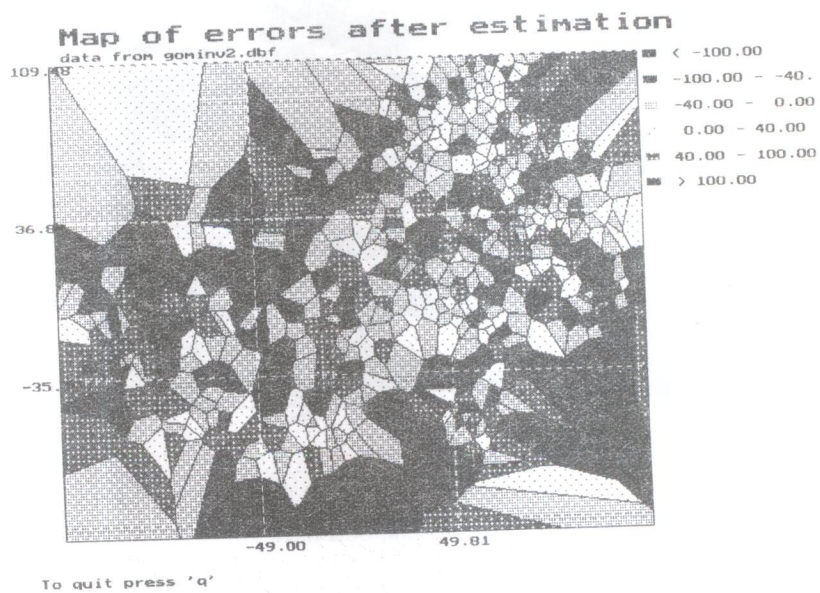


Рис. 35: Гомельская обл., обратные квадраты

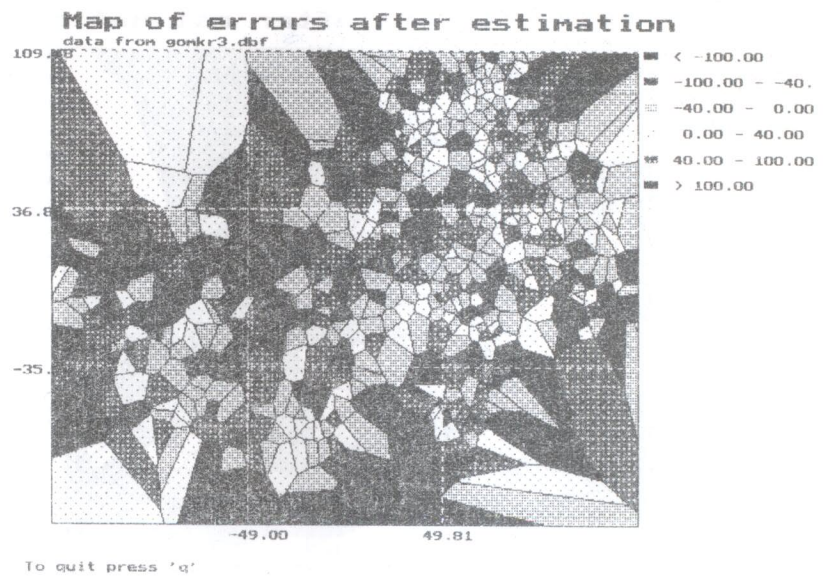


Рис. 36: Гомельская обл., обычный кригинг

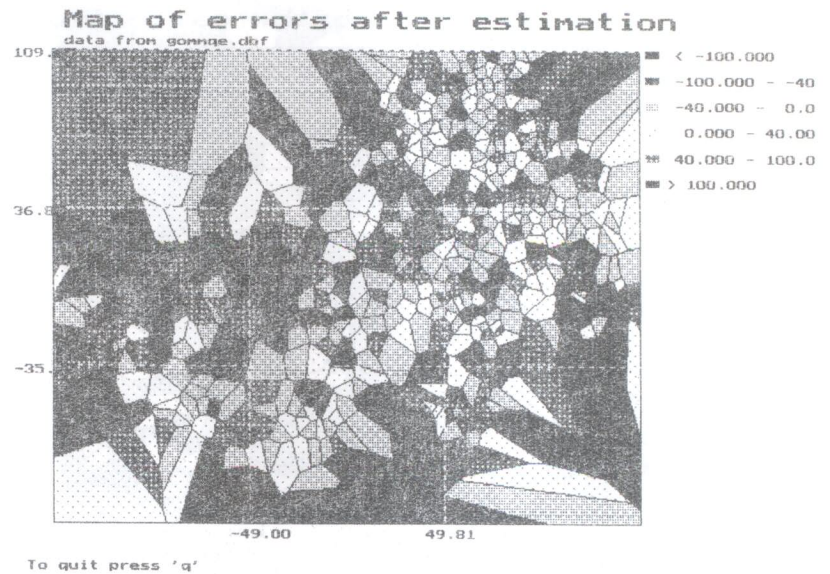


Рис. 37: Гомельская обл., мультиквадратичные уравнения

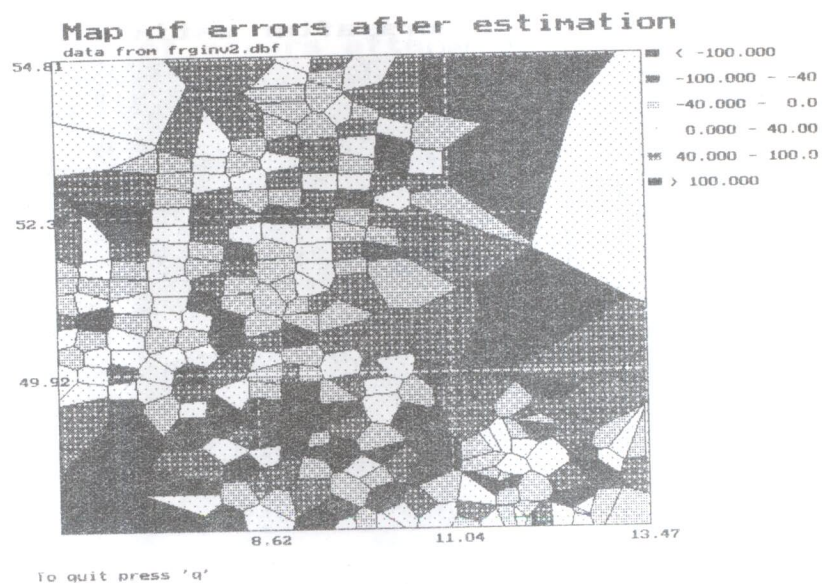


Рис. 38: ФРГ, обратные квадраты

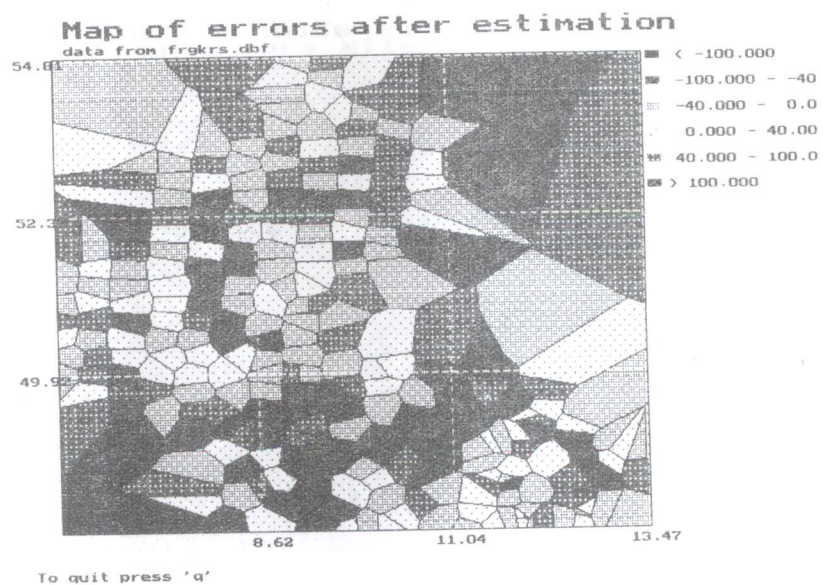
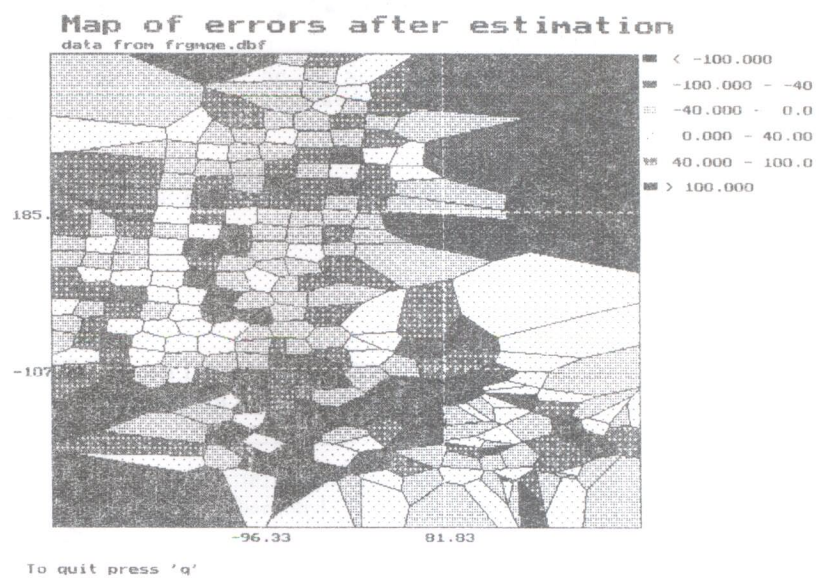


Рис. 39: ФРГ, обычный кригинг



To quit press 'q'

Рис. 40: ФРГ, мультикватричные уравнения

Разброс результатов кросс-валидации

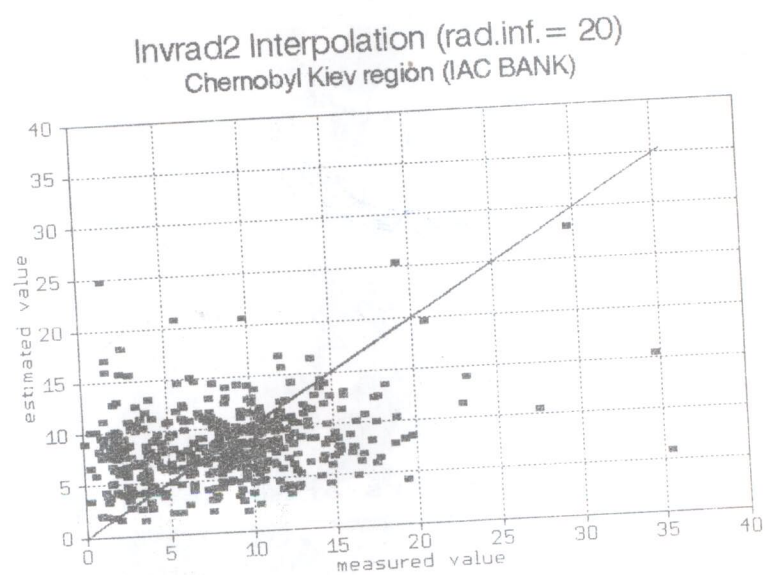


Рис. 41: Г.Чернобыль, обратные квадраты, радиус поиска 20м

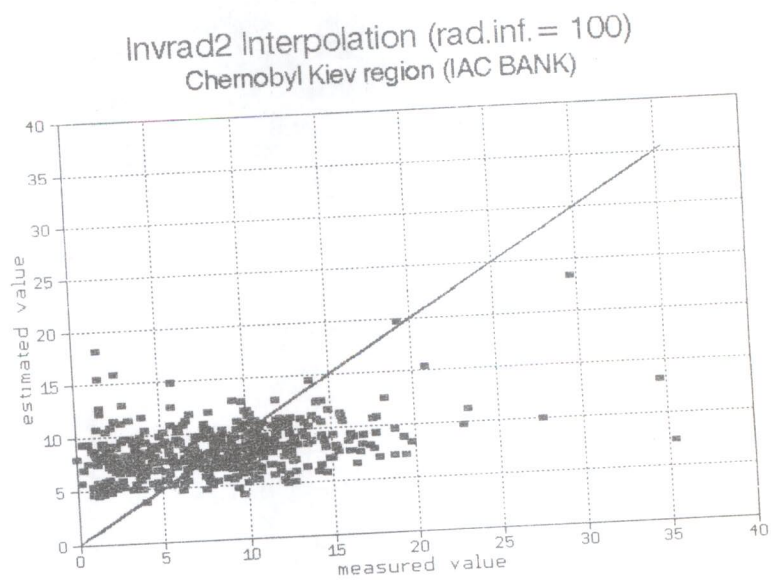


Рис. 42: Г.Чернобыль, обратные квадраты, радиус поиска 100м

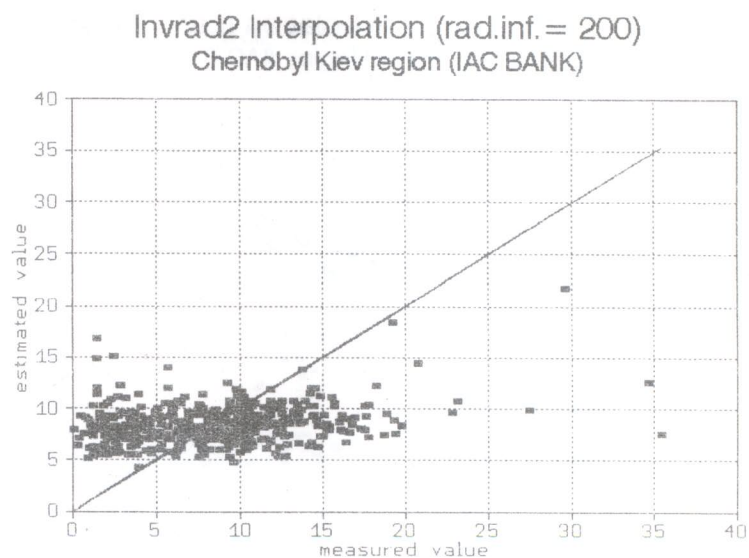


Рис. 43: Г.Чернобыль, обратные квадраты, радиус поиска 200м

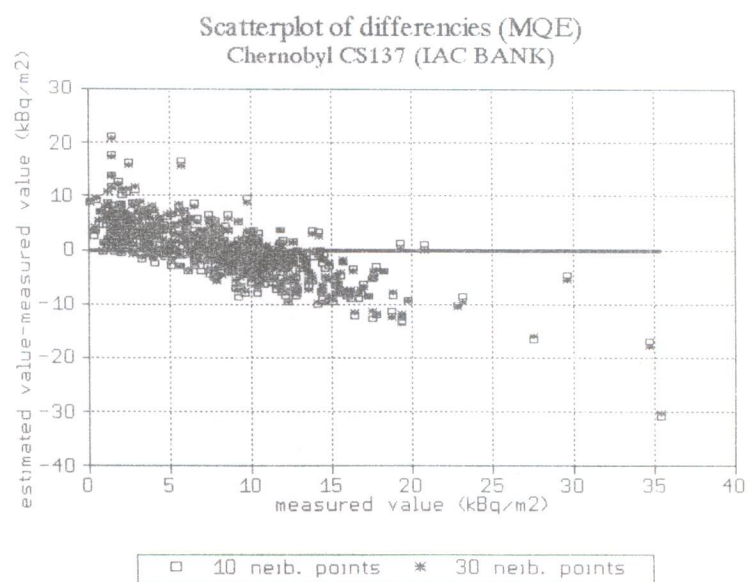


Рис. 44: Г.Чернобыль, мультикватратичные уравнения

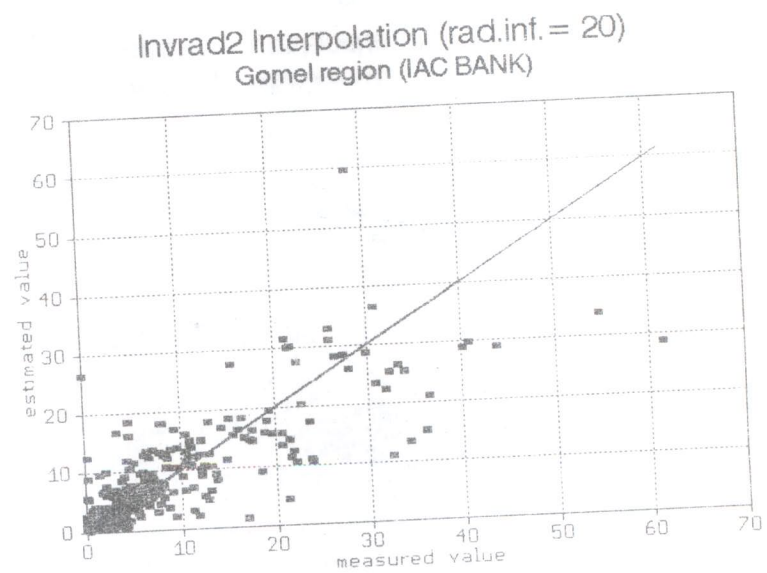


Рис. 45: Гомельская обл., обратные квадраты, радиус поиска 20км

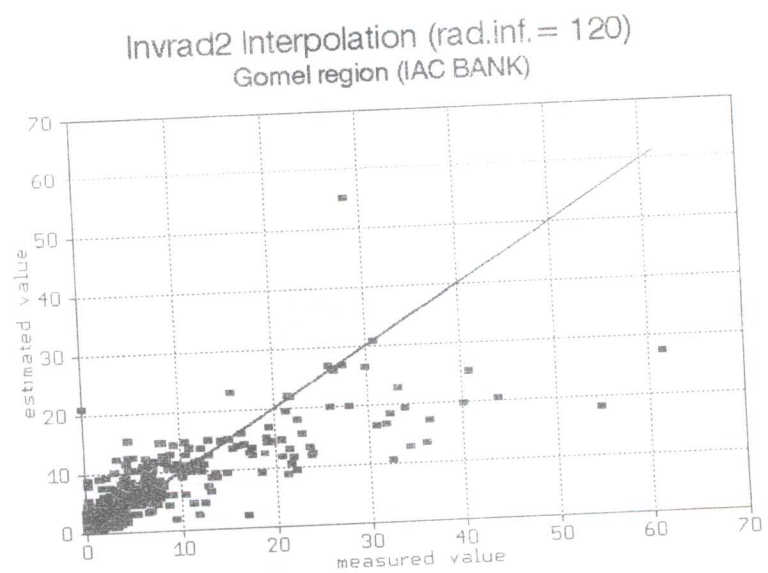


Рис. 46: Гомельская обл., обратные квадраты, радиус поиска 120км

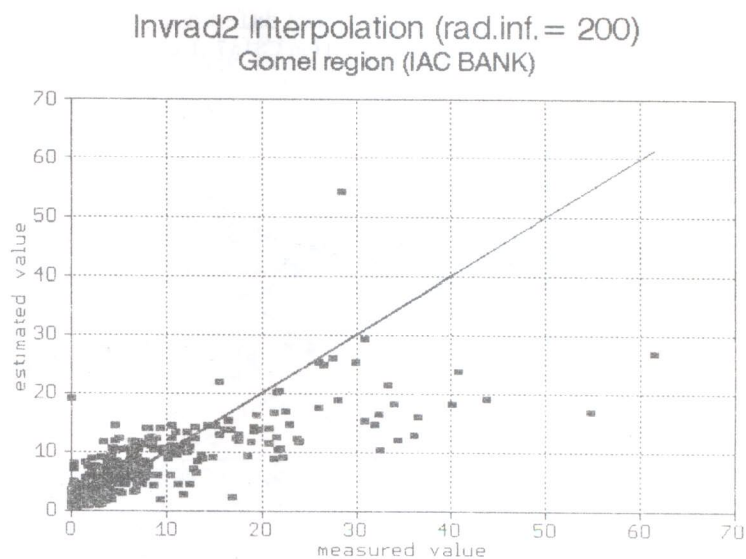


Рис. 47: Гомельская обл., обратные квадраты, радиус поиска 200км

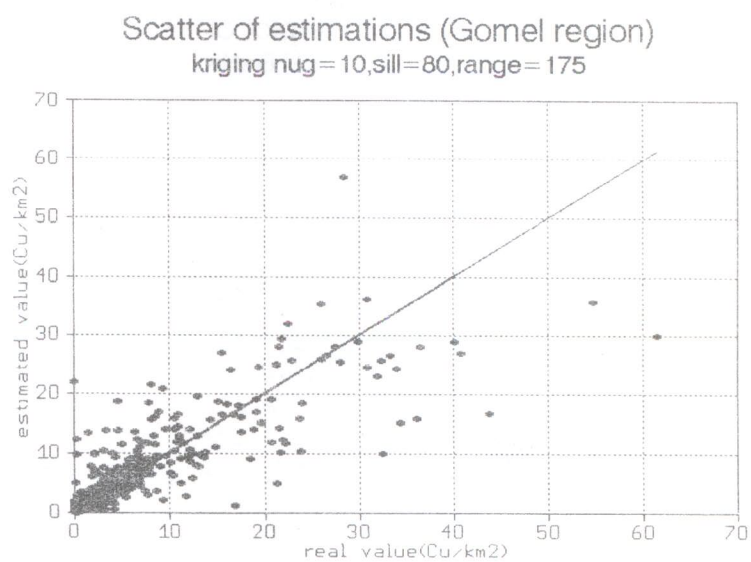


Рис. 48: Гомельская обл., обычный кригинг

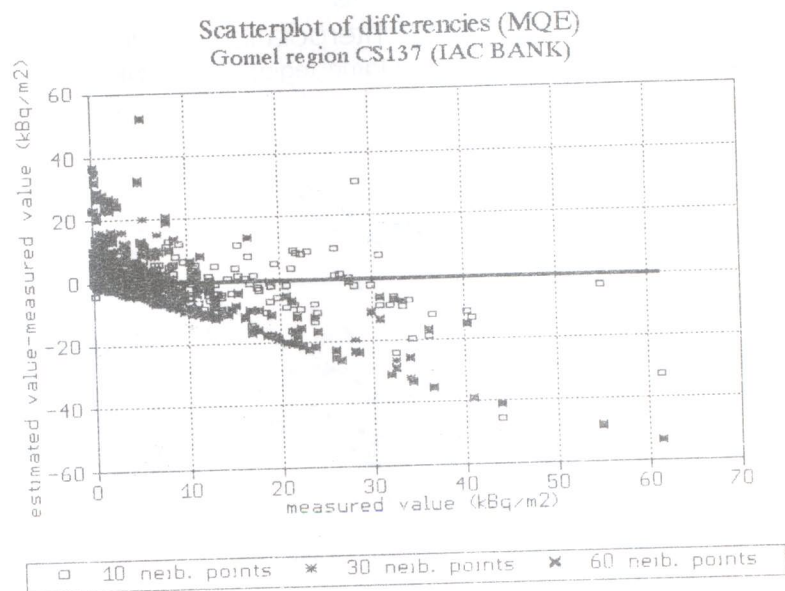


Рис. 49: Гомельская обл., мультиквадратичные уравнения

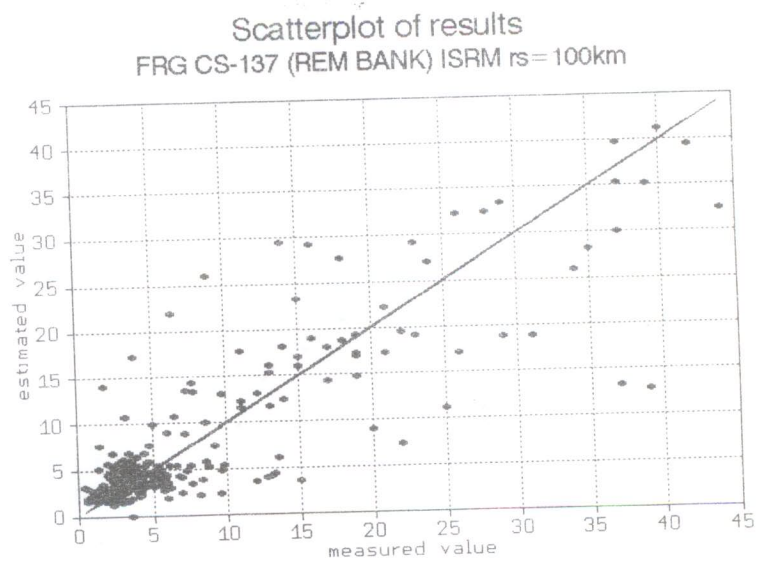


Рис. 50: ФРГ, обратные квадраты, радиус поиска 100км

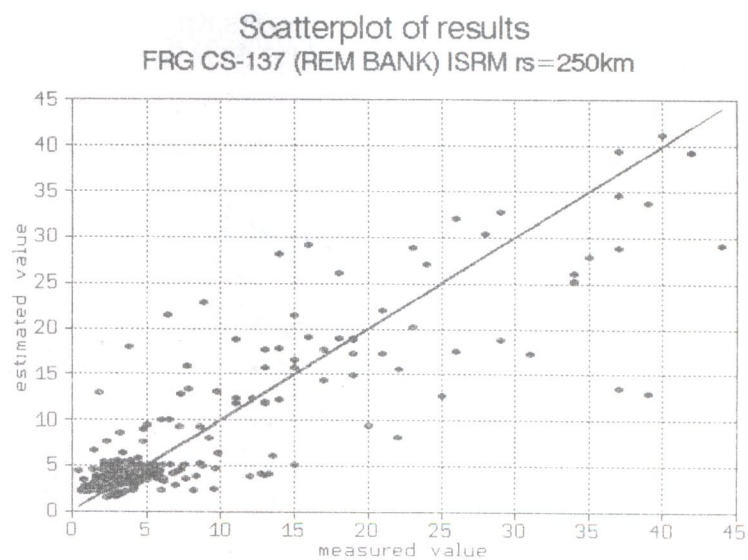


Рис. 51: ФРГ, обратные квадраты, радиус поиска 250км

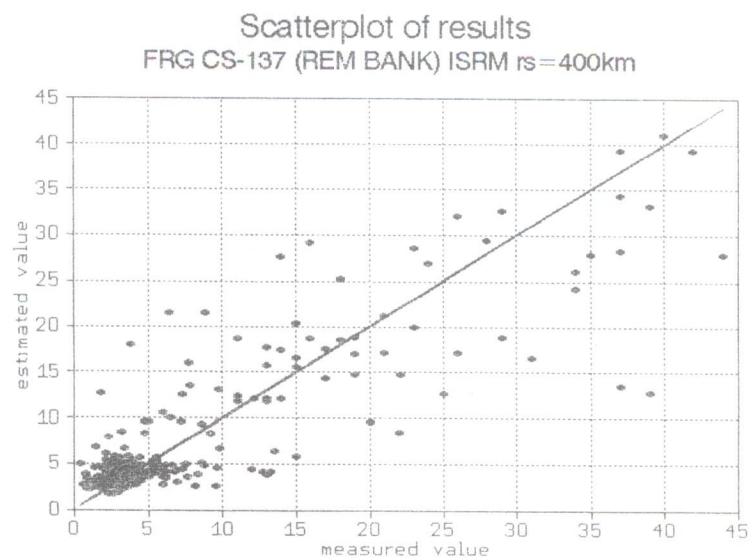


Рис. 52: ФРГ, обратные квадраты, радиус поиска 400км

Scatterplot of results, Kriging(Spher.v)
FRG CS137 (REM BANK)

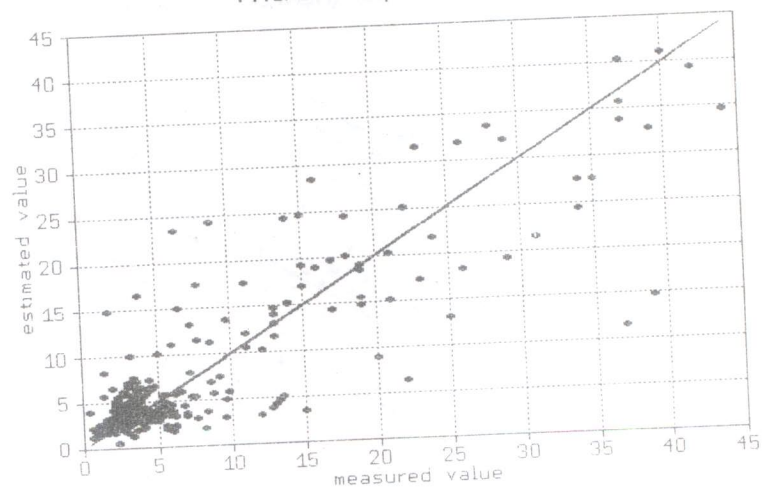


Рис. 53: ФРГ, обычный кригинг

Scatterplot of differences (MQE)
FRG CS137 (REM BANK)

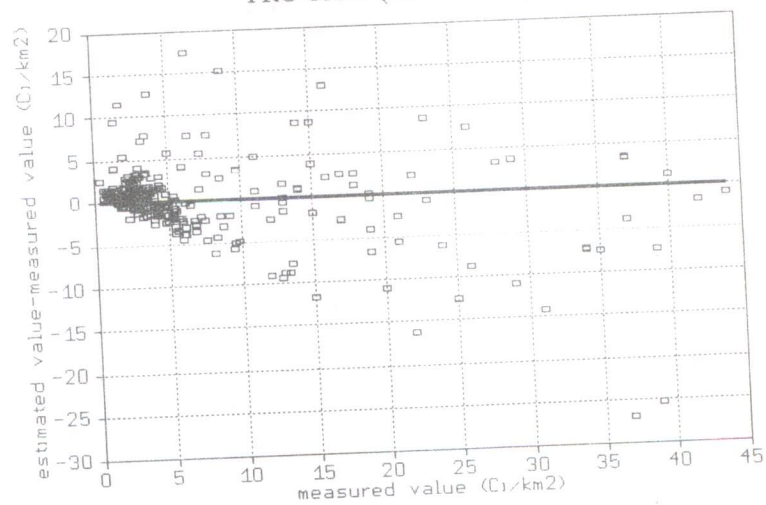


Рис. 54: ФРГ, мультикватратичные уравнения

Семивариограммы отклонений

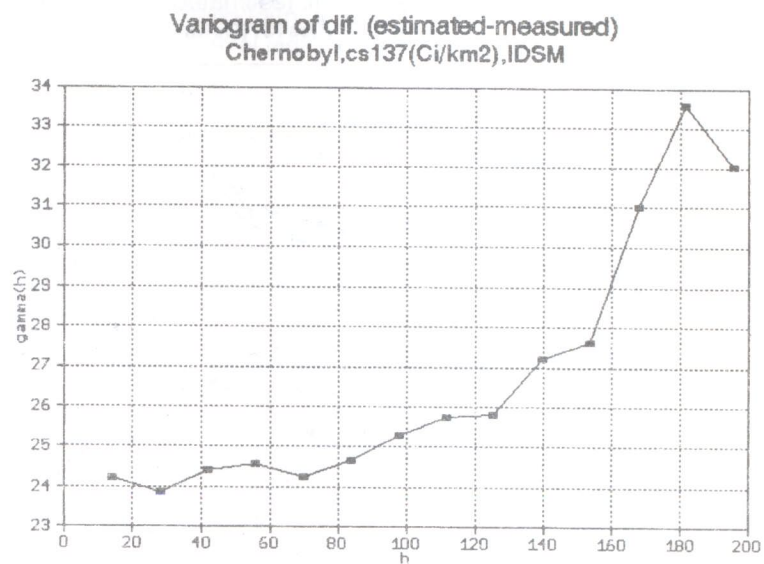


Рис. 55: Г.Чернобыль, обратные квадраты

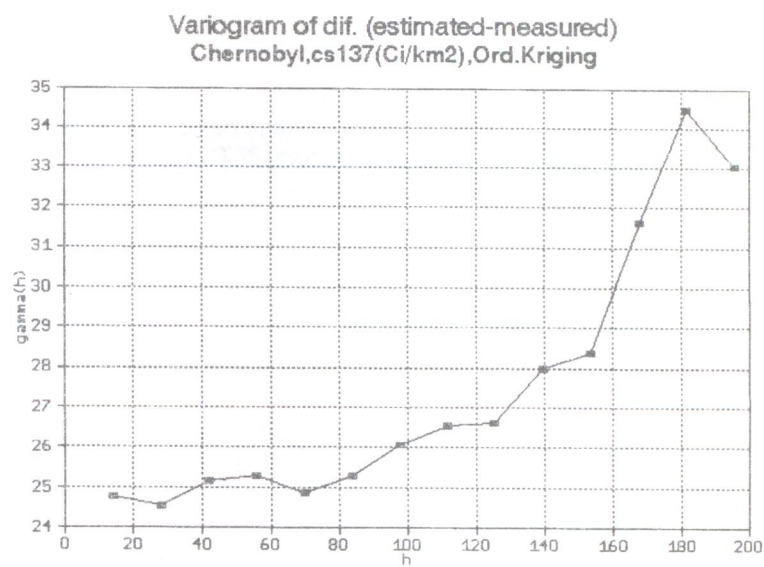


Рис. 56: Г.Чернобыль, обычный кригинг

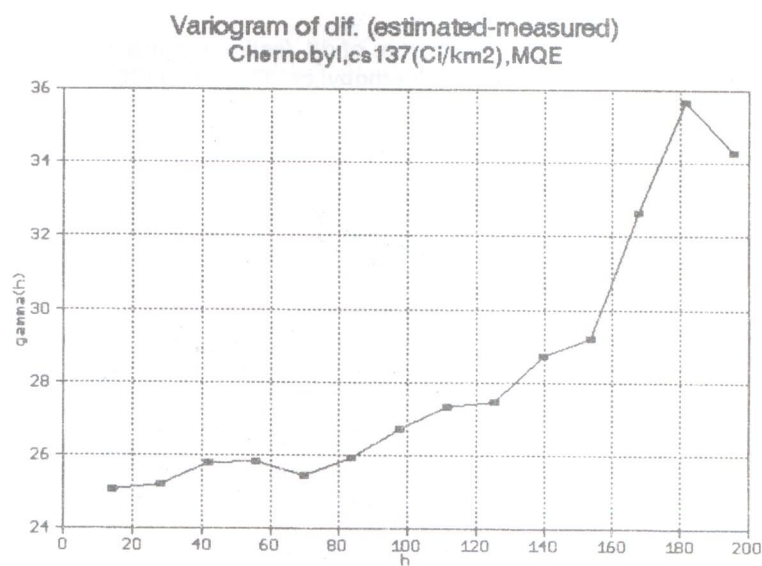


Рис. 57: Г.Чернобыль, мультиквадратичные уравнения

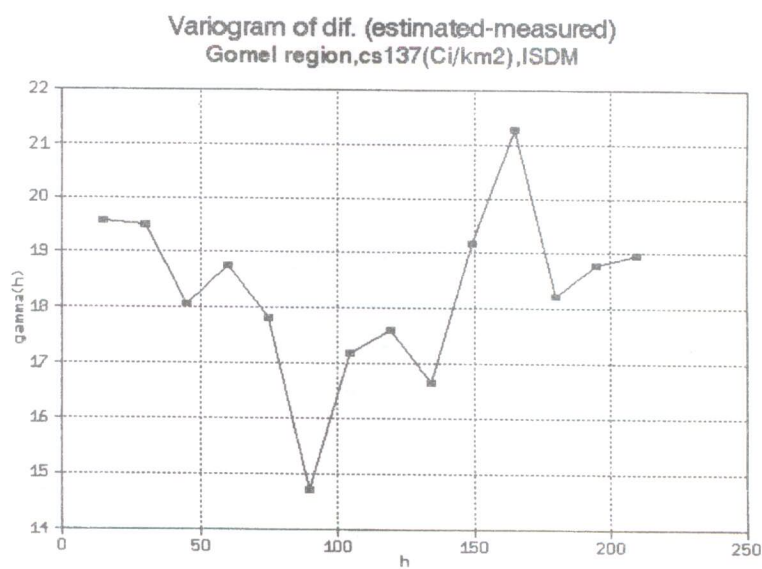


Рис. 58: Гомельская обл., обратные квадраты

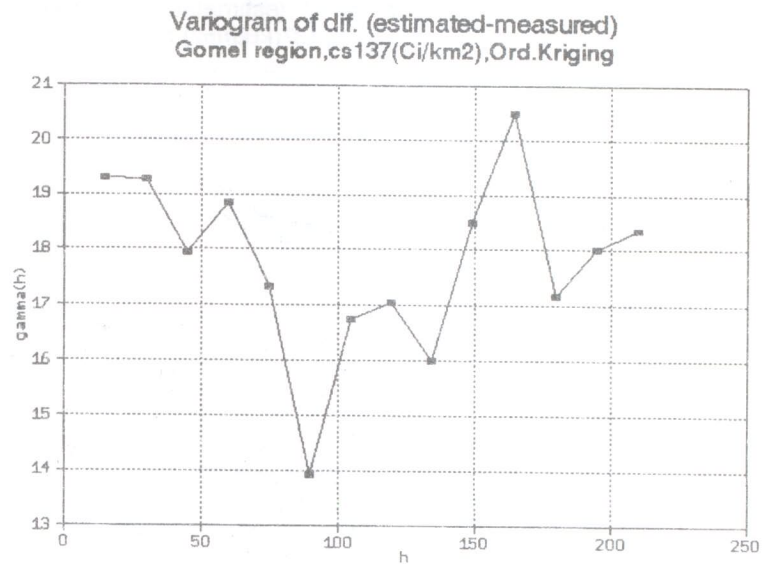


Рис. 59: Гомельская обл., обычный кригинг

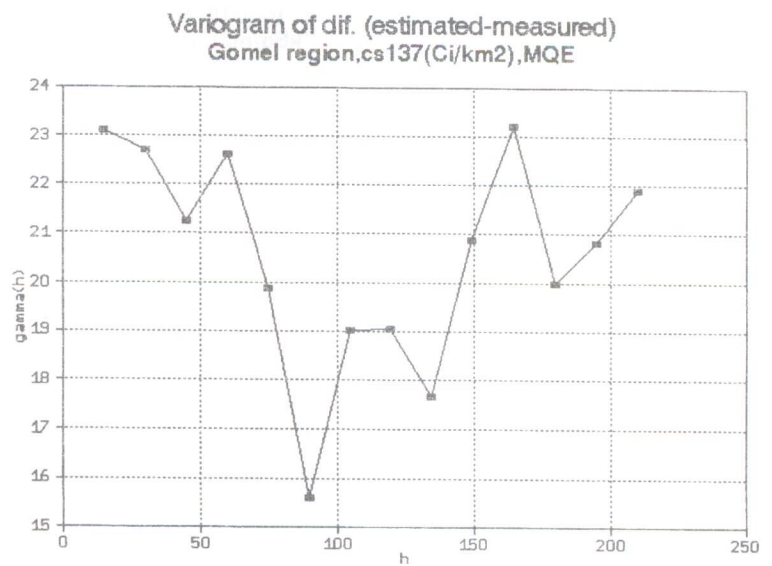


Рис. 60: Гомельская обл., мультиквадратичные уравнения

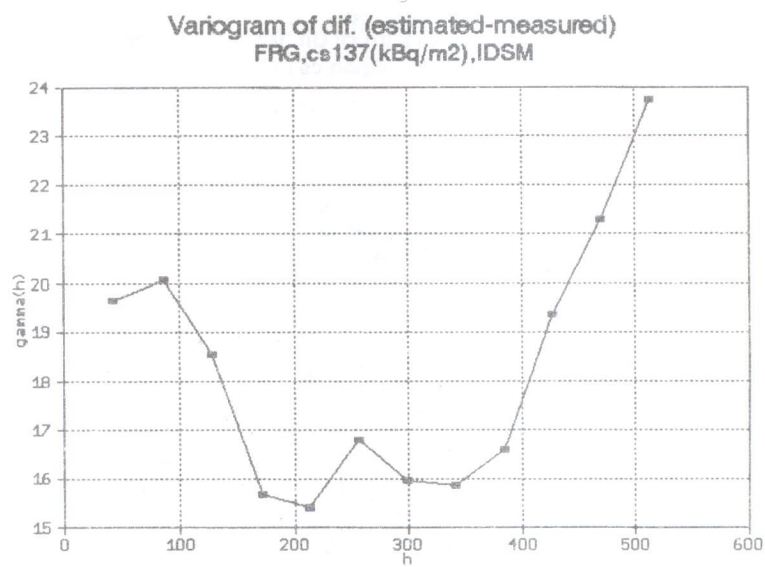


Рис. 61: ФРГ, обратные квадраты

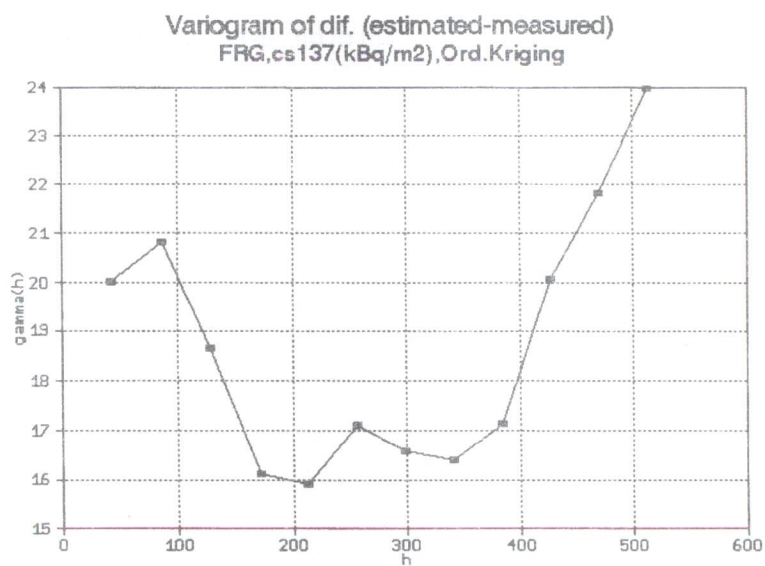


Рис. 62: ФРГ, обычный кригинг

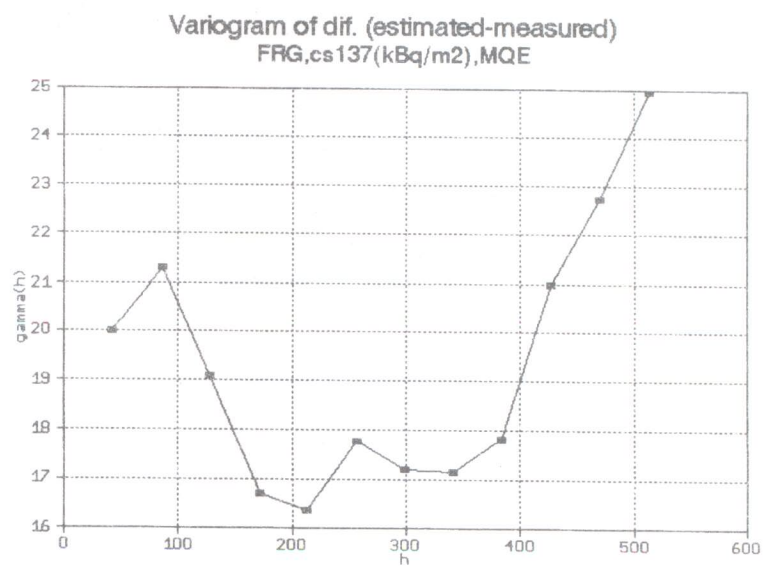


Рис. 63: ФРГ, мультиквадратичные уравнения