

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО  
РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

RUSSIAN ACADEMY OF  
SCIENCES  
NUCLEAR  
SAFETY INSTITUTE

Препринт № IBRAE-97-08

Preprint IBRAE-97-08

А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов,  
А.Г. Чурбанов

**ЧИСЛЕННЫЕ ПОДХОДЫ К  
МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗАДАЧИ  
ДИФФУЗИИ/КОНВЕКЦИИ  
С УЧЕТОМ ПЛАВЛЕНИЯ**

УДК 519.63

Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. ЧИСЛЕННЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ/КОНВЕКЦИИ С УЧЕТОМ ПЛАВЛЕНИЯ. Препринт № ИВРАЕ-97-08. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 1997. 25 с.

#### Аннотация

В настоящей работе обсуждаются некоторые подходы к численному решению задач диффузии/конвекции с учетом плавления. При этом основное внимание уделяется методам решения многомерной задачи Стефана с использованием алгоритмов сквозного счета (fixed grid techniques). Приводятся результаты численных расчетов, проведенных с использованием температурной формулировки и методов сквозного счета.

©ИВРАЭ РАН, 1997

Aksenova A.E., Vabishchevich P.N., Chudanov V.V., Churbanov A.G. NUMERICAL APPROACHES FOR THE SIMULATION OF DIFFUSION/CONVECTION PROBLEM WITH SOLID/LIQUID PHASE CHANGE (in Russian). Preprint IBRAE-97-08. Moscow: Nuclear Safety Institute, April 1997. 25 p.

#### Abstract

The some approaches for the numerical solving of diffusion/convection problem with solid/liquid phase change are considered. Special attention is given to the numerical methods for solving many-dimensional Stefan problem with using of fixed grid techniques. Results on the use temperature formulation and fixed grid techniques in a solving of the standard benchmark problem are reported.

©Nuclear Safety Institute, 1997

# ЧИСЛЕННЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ/КОНВЕКЦИИ С УЧЕТОМ ПЛАВЛЕНИЯ

*А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов, А.Г. Чурбанов*

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

113191 Москва, ул. Б.Тулльская, 52

тел.: (095) 952-24-21, факс: (095) 230-20-29, эл. почта: pbl@ibrae.msk.su

## 1 Введение

Анализ процессов плавления/затвердевания является составной частью многих задач науки и техники. Аналитические решения для задач с фазовыми переходами известны для весьма ограниченного числа случаев, экспериментальные же исследования являются весьма дорогостоящим делом. Все это стимулирует развитие численных методик для моделирования физических и технологических процессов, сопровождающихся фазовыми превращениями. За последние годы появилось значительное число работ, посвященных разработке численных методов для сопряженных задач тепло- и массопереноса при фазовом переходе жидкость/твердое тело с учетом конвекции в жидкой фазе и свободной границей между фазами. Сопоставительный анализ различных численных алгоритмов для задач со свободными границами и основные тенденции их развития приведены в обзорных работах [1, 2, 3, 4].

Впервые к проблеме численного моделирования фазовых переходов с учетом конвекции в жидкой фазе обратились в связи с исследованием металлургических процессов. При затвердевании или плавлении относительно больших объемов металлов и сплавов роль конвекции становится существенной. В настоящее время такие задачи приходится решать при анализе литья и плавления металлов, выращивания кристаллов, аккумуляции энергии, лазерной обработки металлов, замораживания пищевых продуктов, получения пластмасс, в геологии и т.д.

Целью настоящей работы является обсуждение основных подходов к численному решению задач фазового перехода с учетом конвекции. При этом основное внимание уделяется методам решения многомерной задачи Стефана с использованием алгоритмов сквозного счета (fixed grid techniques). Приводятся результаты численных расчетов, проведенных с использованием температурной формулировки и методов сквозного счета.

## 2 Постановка задачи и основные уравнения

При анализе конвективно-диффузионных процессов с учетом фазовых превращений жидкость/твердое тело используется следующая модель:

- используется обычное параболическое уравнение теплопроводности, базирующееся на законе Фурье;
- рассматриваются чистые материалы, для которых на границе раздела фаз выполняется условия Стефана;
- естественная и/или концентрационная конвекция в жидкой фазе рассматривается на основе уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для ламинарных течений;
- изменением плотности при фазовом переходе пренебрегают.

В указанных предположениях математическая модель рассматриваемых процессов включает в себя следующие уравнения, основанные на законах сохранения энергии, массы, количества движения [5].

Распределение температуры в твердой фазе описывается обычным уравнением теплопроводности:

$$\rho_s C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa_s \operatorname{grad} T_s) + S_s^T. \quad (1)$$

В достаточно общей форме уравнения распределения температуры в жидкой зоне с учетом кондуктивного и конвективного теплообмена записывается в следующем виде:

$$\rho_l C_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad}) T_l \right) = \operatorname{div}(\kappa_l \operatorname{grad} T_l) + S_l^T. \quad (2)$$

В случае затвердевания чистых материалов на границе раздела фаз  $\Gamma(t)$ , предполагаемой достаточно гладкой, температура постоянна и равна температуре фазового перехода:

$$\Gamma(t) = \{(x, y, z) | T(x, y, z, t) = T^*\}. \quad (3)$$

На границе фазового перехода  $\Gamma(t)$  удовлетворяются обычные условия Стефана (непрерывность температуры и скачок теплового потока, пропорциональный скорости движения границы):

$$[T] = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma(t), \quad (4)$$

$$\left[ \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \right] = -\rho L V_n, \quad (x, y, z) \in \Gamma(t). \quad (5)$$

Здесь через  $[\phi]$  обозначен скачок величины  $\phi$  при переходе через  $\Gamma(t)$  со стороны твердой в жидкую фазу. Отметим, что условия (4) и (5) могут быть учтены в источниковом члене и тогда вместо уравнений (1)–(5) можно во всей расчетной области рассматривать одно уравнение:

$$\rho C \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad}) T \right) = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + S^*. \quad (6)$$

При этом естественно считать  $\mathbf{v} \equiv 0$  в твердой фазе. Уравнение (6) используется для изучения затвердевания как чистых материалов, так и сплавов и солей — при этом следует определить подходящим образом источник  $S^*$ . Такой подход, когда условия Стефана выделены в отдельный источник, успешно развивается в работах Voller с соавторами [6, 7].

В работах [8, 9, 10] показано, что в случае затвердевания чистых материалов (т.е. решения задачи Стефана) условия (4) и (5) эквивалентны выбору источникового члена  $S^*$  в виде  $S^* = S^T - \rho L \delta(T - T^*) (\partial T / \partial t)$ , где через  $S^T$  обозначены источники, несвязанные с выделением скрытой теплоты кристаллизации. В случае затвердевания сплавов источниковый член  $S^*$  может быть представлен в виде  $S^* = S^T - \rho L (d\Psi/dT)$  (см., например, [11]). После этого уравнение (6) переписывается как:

$$\rho C_{ef} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad}) T \right) = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + S^T, \quad (7)$$

где

$$C_{ef} = \begin{cases} C + L\delta(T - T^*) & \text{для чистых материалов,} \\ C + L \frac{d\Psi}{dT} & \text{для сплавов.} \end{cases} \quad (8)$$

Формулировка уравнения энергии с эффективной теплоемкостью является очень популярной как у нас в стране [12, 13, 14], так и за рубежом [15].

Наконец, уравнение (7) можно преобразовать с помощью введения энтальпии  $h$  к виду:

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad}) h \right) = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + S^T, \quad (9)$$

где:

$$h = \int_{T_0}^T C_s dT, \quad T \leq T^*, \quad (10)$$

$$h = \int_{T_0}^T C_l dT + L, \quad T > T^*. \quad (11)$$

Если ввести единичную функцию Хевисайда:

$$f_1(T - T^*) = \begin{cases} 0, & T < T^*, \\ 1, & T > T^*, \end{cases} \quad (12)$$

то вместо двух уравнений (10),(11) получаем единое уравнение для определения энтальпии:

$$h = \int_{T_0}^T C dT + f_1(T - T^*) L. \quad (13)$$

Таким образом, вместо дельта-функции в уравнение энергии входит функция Хевисайда. Очевидно, что эту функцию можно трактовать как долю жидкой фазы, которая для чистых материалов имеет всего два значения (единичная ступенька с нулем в твердой фазе и единицей в жидкости). Такая формулировка уравнения энергии является наиболее популярной и успешно развивается под руководством Voller.

Следует подчеркнуть следующее. Все три вышеуказанные формулировки единого уравнения для твердой и жидкой фаз (с источником членом, эффективной теплоемкостью и энтальпийная формулировка) абсолютно эквивалентны не только на дифференциальном уровне, но и приводят к одним и тем же трудностям в их численном решении. А именно, приходится решать уравнения, содержащие в том или ином члене либо дельта-функцию, либо разрывную единичную функцию Хевисайда, причем обе эти функции привязаны к температуре плавления. Точность и эффективность решения уравнения энергии сводится к построению хорошей аппроксимации для одной из этих не очень хороших с точки зрения дискретизации функций.

Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \text{div}(\nu \text{grad } \mathbf{v}) + S^V, \quad (14)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (15)$$

Для удобства изложения в последующих частях работы будут рассмотрены численные методы, предназначенные для решения модельной задачи о затвердевании металла в охлаждаемой сбоку прямоугольной полости с теплоизолированными верхним и нижним основаниями. Эта ситуация схематично отображена на рис. 1.

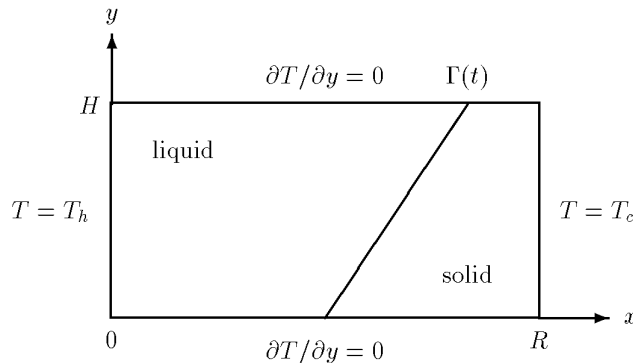


Рис. 1

Естественно, что в случае классической задачи Стефана (чисто тепловая задача) граница между фазами плоская. Отклонение от этой границы является мерой влияния конвекции в расплаве на процессы теплопереноса.

### 3 Методы расчета с выделением границы фазового перехода

Численные алгоритмы для решения задач конвекции/диффузии с фазовыми переходами можно разделить на две основные группы. Первая группа включает в себя методы с выделением границ твердое тело/жидкость. Поскольку граница раздела двух фаз движется, то подстраивание используемых в конкретном алгоритме дискретных элементов должно проводиться динамически в пространстве и времени. Для этого можно использовать систему координат, привязанную к занимаемой жидкостью области. После построения соответствующего преобразования  $\xi = \xi(x, y, t)$  и  $\eta = \eta(x, y, t)$  вместо исходных уравнений (1)–(5), (14), (15) (или же других уравнений гидродинамики, записанных в терминах преобразованных переменных завихренность-функция тока), рассматриваемых в физической области со сложной меняющейся во времени формой, решаются преобразованные уравнения в расчетной области простой фиксированной структуры. В качестве примеров использования такого подхода можно привести, например, работы [16, 17, 18] и цикл работ Lacroix с соавторами [19, 20, 21, 22, 23].

Методы с выделением границы фазового перехода обладают очевидными достоинствами и недостатками. Адаптация к границам расчетной области и, в особенности, к изменяющейся границе твердое тело/жидкость обеспечивает высокую точность получаемых численных результатов. Однако для этого необходимо на каждом временном слое рассчитывать преобразование координат, которое только в простейших случаях может сводиться к простейшим алгебраическим формулам и, более того, для многомерных задач с несколькими движущимися фронтами может стать вообще трудноразрешимой задачей. Кроме того, при работе в обобщенных криволинейных координатах существенно усложняются и сами алгоритмы расчета уравнений гидродинамики. Таким образом, за высокую точность приходится платить увеличением вычислительных затрат и сужением класса задач, для которых применение данного подхода было бы эффективным. В силу этого интенсивно развивается альтернативный подход, включающий в себя методы без выделения фронта плавления/кристаллизации, т.е. алгоритмы сквозного счета с размазыванием фазового перехода (fixed grid techniques) и решением уравнений конвекции/диффузии в рассматриваемой физической области. В упомянутой выше совместной работе Lacroix и Voller [21], которых в настоящее время можно рассматривать как руководителей двух противоположных направлений — transformed grids и fixed grids — на стандартной тестовой задаче о плавлении галлия проведен сопоставительный анализ точности и эффективности эти двух различных подходов. Главный вывод, полученный в этой работе, заключается в следующем. При достаточно эффективных генераторах сетки и одинаковом числе узлов расчетной сетки эти два подхода имеют очень близкие характеристики как по точности расчета, так и по его эффективности. Таким образом представляется разумным использовать для решения сложных прикладных задач, включающих в себя помимо фазовых превращений и другие сложные физико-химические превращения, именно методы сквозного счета. В рамках этого подхода с приемлемой точностью удастся решать задачи сопряженного теплообмена в сложных областях с большим числом разнородных конструктивных элементов, легко реализовать различные модели mushy zone, пористой среды и т.д. В следующем разделе будет проведен более подробный анализ различных вариантов алгоритма сквозного счета и особенностей их численной реализации.

### 4 Методы сквозного счета

В методах сквозного счета рассчитываются единые уравнения для тепла и импульса во всей рассматриваемой области, включающей в себя твердую и жидкую фазы. Аппроксимация функции Хевисайда (или же дельта-функции для температурной формулировки) неизбежно приводит к размазыванию теплового фронта, что можно трактовать как введение плавления/затвердевания не в одной точке, а в заданном диапазоне температуры (переход от чистых материалов к сплавам). Более того, иногда из соображений последовательности введения такой mushy zone размазыванию подвергается и гидродинамический фронт, т.е. та граница, на которой происходит торможение скорости. Примерами использования таких алгоритмов для чисто тепловых задач являются работы [24, 25] для температурной формулировки и работа [26] для энтальпийной формулировки.

Простейшей и наиболее естественной является кусочно-линейная аппроксимация ступеньки Хевисайда, означающая линейный рост доли жидкой фазы в заданном интервале температуры  $(T^* - \eta, T^* + \eta)$ :

$$\tilde{f}_l(T, \eta) = \begin{cases} 0, & T < T^* - \eta, \\ \frac{1}{2\eta}[T - (T^* - \eta)], & T^* - \eta \leq T \leq T^* + \eta, \\ 1, & T > T^* + \eta. \end{cases} \quad (16)$$

Аналогично  $\tilde{f}_l(T, \eta)$  строится эффективная теплоемкость  $\tilde{C}(T, \eta)$  из условия сохранения тепла на заданном интервале:

$$\int_{T^* - \eta}^{T^* + \eta} (C + L\delta(T - T^*)) dT = \int_{T^* - \eta}^{T^* + \eta} \tilde{C}(T, \eta) dT. \quad (17)$$

Для приведенной выше линейной аппроксимации доли жидкой фазы (16) эквивалентной является следующая ступенчатая эффективная теплоемкость:

$$\tilde{C}(T, \eta) = \begin{cases} C, & T < T^* - \eta, \\ C + L/(2\eta), & T^* - \eta \leq T \leq T^* + \eta, \\ C, & T > T^* + \eta. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь плотность и теплоемкость считаются одинаковыми в обеих фазах. При этом вместо уравнения

$$\rho(C + L\delta(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) \quad (19)$$

решается уравнение

$$\rho \tilde{C} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T). \quad (20)$$

Различные варианты аппроксимационных зависимостей для  $\tilde{f}_l$  (и соответственно для  $\tilde{C}$ ) можно найти в вышеупомянутых обзорах [1, 2]. В работах [27, 28] предложены и апробированы гладкие нелинейные аппроксимации этих функций, обеспечивающие более высокую точность. Следует подчеркнуть, что все эти аппроксимационные зависимости содержат управляющий параметр  $\eta$  (полуширина размазывания фронта), оказывающий существенное влияние на точность получаемых результатов и имеющий свои для каждой модели оптимальные значения, определяемые из численных экспериментов.

Для решения алгоритмами сквозного счета уравнений гидродинамики в естественных переменных возможно применение двух вариантов МФО — с продолжением по младшим производным и с продолжением по старшим производным [29]. Оба они нашли широкое применение в моделировании плавления/затвердевания в присутствии конвекции [1].

Продолжение по младшим производным основано на использовании модели пористой среды. Вместо уравнений (14),(15) в нерегулярной и изменяющейся во времени области  $G^*(t)$  рассмотрим во всей расчетной области  $G$  следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v}_\varepsilon, \operatorname{grad}) \mathbf{v}_\varepsilon = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} \mathbf{v}_\varepsilon) - C_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon + S_\varepsilon^{\mathbf{v}}, \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon = 0. \quad (22)$$

Для члена, описывающего гидравлическое сопротивление в уравнении (21), могут применяться различные формулы, основанные на аналогии этого члена с различными моделями пористой среды. При этом коэффициент  $C_\varepsilon$  трактуется как некоторый коэффициент сопротивления. Простейшая модель соответствует отсутствию размазывания границы фазового перехода в уравнениях гидродинамики, т.е. скачкообразное переключение ('switch off' по терминологии Voller [30, 31]) с жидкости на твердое тело. При этом коэффициент продолжения  $C_\varepsilon$  и правая часть  $S_\varepsilon^{\mathbf{v}}$  выбираются следующим образом:

$$C_\varepsilon = \begin{cases} 0, & (x, y) \in G^*(t), \\ \varepsilon^{-2}, & (x, y) \in G/G^*(t). \end{cases} \quad (23)$$

$$S_\varepsilon^{\mathbf{v}} = \begin{cases} S^{\mathbf{v}}, & (x, y) \in G^*(t), \\ 0, & (x, y) \in G/G^*(t). \end{cases} \quad (24)$$

где значение  $\varepsilon$  достаточно мало. Такой подход с резким переходом твердое тело/жидкость в уравнениях гидродинамики до сих пор применяется для решения задачи Стефана (смотри, например, работы [12, 14], где уравнение энергии решалось в температурной формулировке с использованием простейшей аппроксимации (18) для эффективной теплопроводности. Однако в исследованиях Voller с соавторами [30, 31, 32, 33] более перспективным было признано использование размазывание гидродинамического фронта с помощью линейных и даже нелинейных зависимостей для члена сопротивления Дарси.

А именно, для коэффициента сопротивления  $C_\varepsilon$  в члене Дарси были предложены и исследованы применительно к энтальпийной формулировке следующая линейная и экспоненциальная зависимости от доли жидкой фазы  $\tilde{f}_l$ , обеспечивающие согласованное размазывание теплового и гидродинамического фронтов:

линейный Дарси

$$C_\varepsilon = \varepsilon^{-2}(1 - \tilde{f}_l). \quad (25)$$

нелинейный Дарси

$$C_\varepsilon = \varepsilon^{-2}[\exp(1 - \tilde{f}_l) - 1]. \quad (26)$$

показавшие хорошую работоспособность и преимущество перед методами с переменной вязкостью (т.е. с продолжением по старшим производным).

Наиболее подробное изложение разрабатываемого Voller с соавторами fixed grid подхода для моделирования плавления чистых материалов приведено работе [35]. В ней на основе энтальпийной формулировки и модели пористой среды рассчитывалось плавление чистого галлия в подогреваемой сбоку каверне и приводилось сравнение с экспериментальными данными. При этом для коэффициента сопротивления использовалась формула Козени-Кармана, в которой доля жидкой фазы трактовалась как пористость:

$$C_\varepsilon = a \frac{(1 - \tilde{f}_l)^2}{\tilde{f}_l^3 + b}, \quad (27)$$

где коэффициент  $b$  аналогичен  $\varepsilon$  (т.е. обеспечивает большие значения коэффициента сопротивления в твердой фазе), а коэффициент  $a$  учитывает морфологию моделируемой таким способом mushy zone. В расчетах использовались следующие значения этих параметров:  $b = 10^{-3}$  и  $a = 1.6 \times 10^6$ . Причем отмечалось, что можно использовать и линейный закон Дарси (25). Что же касается ступенчатого выключения (23) без размазывания фронта в уравнениях гидродинамики, то оно не рекомендуется, поскольку при малых  $\varepsilon$  (т.е. при резком торможении скорости в твердой фазе) приводит к осцилляциям решения и даже к его расходимости. В работе [36] эта методика успешно использовалась для моделирования нестационарного режима затвердевания в охлажденной трубе (цилиндрические координаты) и также использовалось размазывание гидродинамического фронта, но уже по нелинейному закону Дарси (26). При этом отмечалось важность правильного подбора коэффициента  $\varepsilon$ , управляющего в этой формуле (наряду с  $\tilde{f}_l$ ) за постепенность торможения скорости. Он должен быть не слишком маленьким и не слишком большим и требует экспериментальной настройки.

Обсуждаемый здесь подход, развитый для моделирования фазовых переходов в чистых материалах, основан на размазывании теплового и гидродинамического фронта и поэтому естественным путем переносится на анализ сплавов с mushy zone [34]. Наряду с изучением конкретных процессов авторы вышеперечисленных работ работали и над усовершенствованием численного алгоритма. Особое внимание уделялось определению эффективного коэффициента сопротивления  $C_\varepsilon$  при работе со сплавами. В работах [37, 38] демонстрируется существенное влияние способа определения  $C_\varepsilon$  на результаты расчетов и предлагается более удачный, по мнению авторов, подход к его определению по сравнению с предыдущими работами авторов. Дальнейшему изучению возможностей определения этого коэффициента посвящены работы [39, 40]. В них определение коэффициента сопротивления базируется на имеющейся информации о природе двухфазной зоны.



## 5 Benchmark solutions: predictions and experiments

Стандартным тестом, на котором проверяются численные методики для расчета фазовых переходов в чистых материалах, является задача о плавлении галлия в прямоугольной полости [42] в постановке, приведенной на рис. 1. В этой работе приведены экспериментально полученные профили фронта жидкость/твердое тело на разные моменты времени. Следует отметить особенность используемого в экспериментах материала: теплопроводность твердого поликристаллического галлия анизотропна и по разным направлениям может отличаться в 5 раз. Тем не менее, считается, что в задаче о плавлении (в отличие от кристаллизации) такая неопределенность в свойствах твердой фазы незначительна. Поэтому эта задача используется как нестационарный тест для двумерных расчетов в декартовых координатах. Имеются обширные данные численных расчетов, полученные как методами сквозного счета [21, 35, 41], так и алгоритмами с выделением фронта [19, 43] и включающие в себя не только профили раздела двух фаз, но и картины течения и некоторыми локальными и интегральными характеристиками.

В качестве аналогичного теста для осесимметричной геометрии можно рассматривать задачу о затвердевании чистого олова в цилиндрической полости [44], в которой помимо свободной конвекции существенную роль играет и термокапиллярная. В этой работе сопоставляются экспериментальные данные и численные результаты, полученные алгоритмом сквозного счета из [35] с использованием линейного закона Дарси (уравнение (25)).

## 6 Численные эксперименты

Приведенный выше анализ различных подходов к решению задач плавления/затвердевания показывает, что наиболее оптимальными являются алгоритмы, основанные на методах сквозного счета. Они не имеют геометрических ограничений, связанных с количеством и качеством (гладкостью с точки зрения построения преобразования координат) фронтов фазового перехода, а также, что весьма существенно, легко адаптируются на существующие алгоритмы и программы для решения задач конвективного тепло и массо-обмена. Основные трудности, возникающие при использовании такого подхода, связаны с определением оптимальных значений управляющих параметров, задающих способ и конкретную реализацию размазывания теплового и гидродинамического фронтов. Следует сразу подчеркнуть, что приводимые результаты носят предварительный характер, поскольку подобное исследование является многопараметрическим и существенно зависит от конкретного алгоритма расчета уравнений гидродинамики и теплообмена. В силу этого оно требует детальной проработки, о чем свидетельствует почти десятилетний опыт исследований Voller *et al.*

В качестве тестовой задачи была выбрана упомянутая выше задача о плавлении чистого галлия в прямоугольной полости [42] в постановке, рассмотренной в основанных на методе сквозного счета численных работах [35, 41]. А именно, в двумерной постановке рассматривается задача плавления твердого галлия в прямоугольной полости с адиабатическими горизонтальными стенками и разнотемпературными изотермическими вертикальными. Общая схема и граничные условия приведены на рис. 1. При этом тепловые свойства (теплоемкость, теплопроводность и плотность) твердой и жидкой фазы считаются одинаковыми:

$$C_s = C_l, \quad \kappa_s = \kappa_l, \quad \rho_s = \rho_l,$$

а для описания свободной конвекции справедливо использовать приближение Буссинеска.

Необходимо подчеркнуть, что проведение натурных экспериментов для задач с фазовыми переходами является очень трудоемкой задачей. Необходимость работать одновременно с двумя фазами рабочего материала, имеющими удобный для проведения экспериментов диапазон температур, весьма ограничивает возможности его выбора. Жидкие металлы (галлий, олово и т.д.), используемые в силу своих специфических свойств для этих целей, затрудняют визуализацию конвективного движения и получение температурного поля во всей рассматриваемой области. Основным результатом измерений является положение фронта фазового перехода, полученное на основе не слишком большого количества термопар. Наконец, задача является существенно нестационарной, что не позволяет повысить точность измерений за счет локальной адаптации измерительной техники.

Что касается рассматриваемых экспериментов [42], то необходимо отметить следующие особенности, оказывающие влияние на точность измерений. Во-первых, как отмечают сами авторы, теплопроводность использовавшегося в экспериментах материала (твердого поликристаллического галлия) существенно анизотропна и может отличаться в 5 раз по разным направлениям. Во-вторых, основным результатом измерений является положение фронта фазового перехода, определяемое по относительно небольшому числу термопар (13 на ее верхней и нижней горизонтальных стенках и 17 в среднем сечении полости), т.е. приводимый в данной работе профиль фронта построен по 3 точкам. Это приводит к достаточно произвольной трактовке промежуточных значений, что особенно заметно на пересекающихся профилях, соответствующим моментам  $12\frac{1}{2}$ , 15 и 17 минут. Далее, не совсем понятно, насколько хорошо в эксперименте решен вопрос с прилипанием жидкой фазы на верхней границе, поскольку изменение агрегатного состояния в большинстве случаев сопровождается изменением плотности вещества (и соответственно его объема). В некоторых аналогичных экспериментах факт образования воздушной прослойки над жидкостью (т.е. свободной поверхности) явно учитывается в эксперименте и приводимых измерениях. Наконец, в численных экспериментах различных авторов данная экспериментальная работа трактуется несколько по-разному в смысле начально-краевой задачи: а именно, в работах [19, 21, 43] начальная температура твердой фазы и температура правой вертикальной стенки соответствовала температуре фазового перехода, в то время как в расчетах [35, 41] эти начальные и граничные условия были на 1.5 градуса ниже температуры плавления.

В данной работе для моделирования процесса плавления галлия использовался метод сквозного счета, основанный на температурной формулировке и модели пористой среды. Алгоритм расчета основан на разработанных ранее разностных схемах расщепления для расчета нестационарных уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в естественных переменных [45, 46, 47, 48]. Он использует разнесенную сетку MAC-типа, на которой компоненты скорости относятся к соответствующим граням ячеек, а давление — к центрам ячеек. Для уравнений гидродинамики используются специальные аппроксимации пространственных производных, при которых разностные операторы наследуют основные свойства исходных дифференциальных операторов и обеспечивают второй порядок аппроксимации по пространству. Операторы конвективного переноса записываются в кососимметричной форме и аппроксимируются со вторым порядком на основе центральных разностей. При этом для разностных решений справедливы априорные оценки, аналогичные априорной оценке решений исходной дифференциальной задачи. Эти оценки гарантируют ограниченность решений нелинейных задач и устойчивость линеаризованных задач. Полученная схема обеспечивает второй порядок аппроксимации по пространству. В разностной схеме для уравнения температуры для аппроксимации конвективных членов в дивергентной форме использовалась схема отложенной коррекции, предложенная Khosla-Rubin [49]. Она обеспечивает второй порядок аппроксимации оператора конвективного переноса. Для решения получаемых систем сеточных уравнений используется метод сопряженных градиентов с предобуславливанием, реализованный как для самосопряженных, так и для несамосопряженных сеточных задач. Тестовые расчеты показали, что разработанный алгоритм имеет слабые ограничения на шаг интегрирования по времени, вызванные нелинейностью решаемых уравнений. Данный метод расчета конвективного теплопереноса был успешно апробирован на стандартных тестовых задачах с использованием последовательности получаемых дроблением пополам однородных сеток и показал второй порядок точности получаемых численных результатов.

Все расчеты проводились в безразмерной постановке. В качестве параметров обезразмеривания использовались  $H$  — высота полости,  $\nu$  — кинематическая вязкость и характерный перепад температуры  $\Delta T = T_h - T_c$ , где  $T_h$  и  $T_c$  есть температура горячей и холодной стенок полости соответственно. Аспектное отношение полости составляет  $AR = 0.714$ . В качестве характерной температуры рассматривалась температура холодной стенки  $T_c$ . Следует подчеркнуть, что в расчетных работах [35, 41] в качестве характерного перепада температуры рассматривался  $\Delta' T = T_h - T^*$ , что следует учитывать при сопоставлении получаемых результатов. Безразмерные переменные при таком способе обезразмеривания выглядят следующим образом:

$$t' = t/(H^2/\nu), \quad x'_i = x_i/H, \quad v'_i = v_i/(\nu/H), \quad i = 1, 2,$$

$$p' = (p - p_0 + \rho g y)/(\rho \nu^2/H^2), \quad \Theta = (T - T_c)/\Delta T = (T - T_c)/(T_h - T_c).$$

Числа Прандтля, Грасгофа и Стефана при таком способе обезразмеривания имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{Pr} &= \frac{\nu}{\kappa/(\rho C)} = 0.0216 \\ \text{Gr} &= \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu^2} = 3.31 \times 10^7 \\ \text{Ste} &= \frac{L}{C \Delta T} = 21.66 \end{aligned}$$

Следует отметить, что введенное здесь определение числа Стефана отличается от общепринятого [1] и использовавшегося в [35, 41] как обратное к единице и является более разумным с точки зрения физики.

Безразмерная температура плавления равна 0.15. Шаг интегрирования по времени  $\tau$  выбирался из соображений удобства сопоставления и точности решения нелинейной задачи достаточно малым и равным  $\tau = 7.366 \times 10^{-6}$ , что соответствует 0.1 сек. реального времени. Таким образом, для моделирования всего 20 минутного эксперимента требуется 12000 шагов интегрирования по времени. Отметим, что в работах [35, 41] на каждом шаге уравнения решались итерационно и общее число итераций близко к нашему числу шагов интегрирования. Остальные управляющие параметры расчета, задающие относительную и квадрат абсолютной точности сходимости итерационных методов решения сеточных уравнений для скорости и давления приведены в таблице 1.

**Табл. 1:** Параметры точности решения уравнений

$\varepsilon_{vr}$	$1 \times 10^{-8}$
$\varepsilon_{va}^2$	$1 \times 10^{-20}$
$\varepsilon_{pr}$	$1 \times 10^{-10}$
$\varepsilon_{pa}^2$	$1 \times 10^{-20}$

Следует отметить, что все обсуждаемые ниже расчеты были получены на достаточно подробной равномерной сетке  $140 \times 50$  шагов. В обоих используемых для сравнения численных работах [35, 41] использовалась достаточно грубая ( $42 \times 32$ ) для такого высокого числа Gr расчетная сетка. При этом никаких исследований порядка точности, в особенности в отношении конвективных членов, весьма существенных для рассматриваемых режимов сильно-конвективных течений с пограничными слоями, в указанных работах не проводилось. Хорошо известно, что в узких прямоугольных и кольцевых щелях (что соответствует начальным этапам развития процесса плавления) при высоких числах Грасгофа образуются сложные многовихревые структуры, которые невозможно разрешить (и которые не получаются в [35]) при использовании грубой расчетной сетки, не разрешающей образующиеся достаточно тонкие пограничные слои.

Целью численных экспериментов был анализ влияния и определение оптимальных значений управляющих параметров в методе сквозного счета. Использовались линейное размазывание гидродинамического фронта (16) и соответствующее ему ступенчатое представление дельта-функции (18), принимающее после обезразмеривания следующий вид:

$$\tilde{C}(\Theta, \eta) = \begin{cases} C, & \Theta < \Theta^* - \eta, \\ C + \text{Ste}/(2\eta), & \Theta^* - \eta \leq \Theta \leq \Theta^* + \eta, \\ C, & \Theta > \Theta^* + \eta. \end{cases} \quad (28)$$

где  $\eta$  относится уже к безразмерной температуре.

При таком подходе имеются два основных параметра, влияющих на ширину и точность размазывания гидродинамического и теплового фронтов фазового перехода. Для коэффициента сопротивления использовалось следующее значение:

$$C_\varepsilon = 1 \times 10^{10},$$

а для полуширины размазывания гидродинамического и теплового фронтов применялись различные подходы.

А именно, было предложено выбирать ширину размазывания гидродинамического и теплового фронтов динамически. По заданному числу шагов  $N_{1/2front}$  определялась полуширина  $\eta$  как минимальная разница между температурой плавления и температурой в заданных (отступающих от фронта на заданное число шагов сетки) узлах слева и справа от фазового фронта на верхней и нижней гранях полости.

Результаты расчетов при таком динамическом определении  $\eta$  показали следующие закономерности. Величина полуширины размазывания фронта  $\eta$  за время плавления меняется очень существенно. При полуширине размазывания фронта, определяемом по  $N_{1/2front}=3$  шагов сетки она менялась в 100 раз, а при  $N_{1/2front}=7$  — в 10 раз за время плавления материала. Таким образом очевидно, что в силу такого большого изменения градиента температуры во времени невозможно задавать  $\eta$  постоянной. Ее необходимо определять динамически. При этом особенности данной задачи приводят к тому, что размазывание фронта на  $N_{1/2front}$  шагов выполняется только в твердой фазе у нижней границы полости. У верхней границы полости из-за более высоких градиентов температуры в твердой фазе такое значение  $\eta$  приводит к размазыванию только на в два раза меньшее число шагов. В жидкой фазе при этом фронт вообще размазывается не более чем на один узел сетки. Из-за такой неоднородности градиентов теплового поля в разных областях расчеты с  $N_{1/2front}=3$  дали скорость движения фронта в 3 раза большую чем в эксперименте. Это объясняется тем, при таком заданном максимальном числе шагов размазывания полуширины фазового фронта в верхней части полости фронт размазывается только на один шаг сетки и, более того, в нем образуются разрывы. Это и приводит к столь существенному различию в результатах расчета и эксперимента при таком малом значении количества узлов размазывания полуширины фазового фронта.

При значении  $N_{1/2front}=7$  расчеты показали хорошее совпадение с экспериментом. На Рис. 2–10 представлены мгновенные картины течения и теплового поля, рассчитанные для данного значения полуширины размазывания фронта на соответствующие эксперименту моменты времени — 2,3,6,8,10,12.5,15,17 и 19 минут соответственно. Линии тока представлены с помощью эквидистантных изолиний, отсчитываемых от нулевого значения — 14 для основного вихря и 9 для вторичных. Аналогично тепловое поле представлено через 19 изотерм с безразмерным шагом 0.05, т.е. третья от правой холодной границы изотерма и есть граница фазового перехода со значением 0.15. На все рассмотренные моменты времени помимо основного вихря существуют несколько вторичных вихрей, существенно искривляющих фронт фазового перехода. В начальные моменты времени, когда жидкая фаза образует узкую щель, основной вихрь имеет многоглавую структуру. В дальнейшем развитии с увеличением доли жидкой фазы основной вихрь становится одноглавым и занимает практически всю область, что приводит к значительной разнице в скорости движения фронта у нижней и верхней границ полости.

Рисунок 11 демонстрирует динамику движения фронта фазового перехода. На верхнем графике приведены результаты экспериментальных измерений на указанные моменты времени, на нижнем — полученные в данных расчетах линии фазового фронта. С учетом факта, что экспериментальные кривые построены по трем точкам измерения (расположенным на верхней и нижней границах и в среднем сечении), совпадение экспериментальных и расчетных данных можно считать удовлетворительным.

Помимо ширины размазывания фронта существенным фактором является выбор коэффициента сопротивления  $C_\varepsilon$ , определяющего степень торможения конвекции в твердой фазе. Значение  $C_\varepsilon = 1 \times 10^{10}$  оказалось оптимальным для заданного числа Грасгофа. При максимальной за все время расчета интенсивности основного вихря  $|\psi|_{max} \approx 5 \times 10^2$  значения функции тока в твердой фазе составляли около  $|\psi| \approx 1 \times 10^{-4}$ , что вполне соответствует понятию "твердой фазы". При более высоких числах Грасгофа необходимо подбирать более высокие значения этого параметра. Следует отметить, что в данной реализации метода фиктивных областей условия непротекания через фронт фазового перехода ( $\frac{\partial \delta p}{\partial n} = 0$ ) не ставились. Более того, попытки реализовать это условие в расчете окончились неудачей, поскольку из-за такого резкого выделения гидродинамического фронта алгебраическая задача для поправки давления оказалась плохо обусловленной, что привело к расходимости применяемого в расчете итерационного метода решения сеточных уравнений.

Следующим шагом дальнейших исследований является использование локального определения полуширины размазывания фазового перехода, свое для каждой координатной линии сетки. Оно обеспечивает одинаковую во всей твердой фазе ширину размазывания фронта, не зависящую от локальных температурных градиентов. Первые расчеты с таким локально-

динамическим выбором  $\eta$  дали обнадеживающие результаты. Далее, необходимо провести исследование влияния размеров сетки на предложенный алгоритм. Наконец, следует проанализировать различные способы размазывания фазового перехода: только в твердой фазе, симметрично в твердой и жидкой фазах и т.д.

## Литература

- [1] B. Basu and A.W. Date, Numerical modelling of melting and solidification problems — A review, *Sādhanā* **13**, 169–213 (1988).
- [2] V.R. Voller, C.R. Swaminathan and B.G. Thomas, Fixed grid techniques for phase change problems: a review, *Int. J. Numer. Methods Engng.* **30**, 875–898 (1990).
- [3] A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, O.P. Iliev and A.G. Churbanov, Numerical simulation of convection/diffusion phase change problems — a review, *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 4095–4106 (1993).
- [4] A.E. Aksenova, P.N. Vabishchevich, V.V. Chudanov and A.G. Churbanov. Numerical simulation of solidification processes in diffusion/convection problems. A review. Preprint NSI-95-11, Nuclear Safety Institute, Russian Ac.Sci., Moscow, 1995 (in Russian).
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Pergamon, Oxford (1987).
- [6] V.R. Voller, Fast implicit finite-difference methods for the analysis of phase change problems, *Numer. Heat Transfer* **17B**, 155–169 (1990).
- [7] V.R. Voller and C.R. Swaminathan, A general source-based method for solidification phase change, *Numer. Heat Transfer* **19B**, 175–189 (1991).
- [8] O.A. Oleinik, On a method for the general Stefan problem solution, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **135**, 1054–1057 (1960) (in Russian).
- [9] L.I. Rubinstein, *The Stefan Problem*. Zinatne, Riga (1967) (in Russian).
- [10] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*. Nauka, Moscow (1972) (in Russian).
- [11] M.C. Flemings, *Solidification Processing*. McGraw-Hill, New York (1974).
- [12] P.N. Vabishchevich and O.P. Iliev, Numerical solution of conjugate heat and mass transfer problems including phase change, *Differentsial'nye Uravneniya* **23**, 1127–1132 (1987) (in Russian).
- [13] M.P. Leonchuk, Yu.E. Shvetsov and L.V. Shvetsova, Numerical simulation of melting processes involving convection. Obninsk Institute for Thermophysics Preprint No. 1932. Obninsk (1988) (in Russian).
- [14] E.L. Tarunin, *Numerical Experiment in Free Convection Problems*. Irkutsk University Publishers, Irkutsk (1990) (in Russian).
- [15] D. Poirier and M. Salcudean, On numerical methods used in mathematical modeling of phase change in liquid metals, *ASME J. Heat Transfer* **110**, 564–570 (1988).
- [16] T. Saitoh and K. Hirose, High Rayleigh number solutions to problems of latent heat thermal energy storage in a horizontal cylinder capsule, *ASME J. Heat Transfer* **104**, 545–553 (1982).
- [17] H. Rieger, U. Projahn and H. Beer, Heat transfer during melting inside a horizontal tube, *ASME J. Heat Transfer* **105**, 226–234 (1983).
- [18] A. Sasaki, S. Aiba and S. Fukusako, Numerical study on freezing heat transfer in water-saturated porous media, *Numer. Heat Transfer* **18A**, 17–32 (1990).
- [19] M. Lacroix, Computation of heat transfer during melting of a pure substance from an isothermal wall, *Numer. Heat Transfer* **15B**, 191–210 (1989).

- [20] M. Lacroix, Analysis of mixed convection melting of a pure metal, *Numer. Heat Transfer* **17A**, 401–416 (1990).
- [21] M. Lacroix and V.R. Voller, Finite difference solutions of solidification phase change problems: transformed versus fixed grids, *Numer. Heat Transfer* **17B**, 25–41 (1990).
- [22] M. Lacroix, Effects of buoyancy and surface tension forces on the melting of a metal, *Numer. Heat Transfer* **19A**, 101–115 (1991).
- [23] M. Lacroix and A. Garon, Numerical solution of phase change problems: an Eulerian-Lagrangian approach, *Numer. Heat Transfer* **19B**, 57–78 (1992).
- [24] A.A. Samarskii and B.D. Moiseenko, An efficient fixed grid scheme for the solution of the multidimensional Stefan problem, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* **5**, 816–827 (1965) (in Russian).
- [25] B.M. Budak, E.N. Solov'yeva and A.B. Uspenskii, A difference method with coefficients smoothing for the Stefan problem solution, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* **5**, 828–840 (1965) (in Russian).
- [26] N. Shamsundar and E.M. Sparrow, Analysis of multidimensional conduction phase change via the enthalpy model, *ASME J. Heat Transfer* **97**, 333–340 (1975).
- [27] V.I. Mazhukin, Yu.A. Poveshchenko, S.B. Popov and Yu.P. Popov, On uniform algorithms for the Stefan problem solution, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprint N 122, Moscow (1985) (in Russian).
- [28] M. Yao and A. Chait, Application of the homographic approximation in the enthalpy method for phase change problems, *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow* **3**, 157–172 (1993).
- [29] P.N. Vabishchevich, *The Fictitious Regions Method in Problems of Mathematical Physics*. Moscow University Publishers, Moscow (1991) (in Russian).
- [30] V.R. Voller, N. Markatos and M. Cross, Techniques for accounting for the moving interface in convection/diffusion phase change. In *Numerical Methods in Thermal Problems* (Eds. R.W. Lewis and K. Morgan), Vol.4, pp.595–609. Pineridge Press, Swansea (1985).
- [31] V.R. Voller, N.C. Markatos and M. Cross, Solidification in convection and diffusion. In *Numerical Simulations of Fluid Flow and Heat/Mass Transfer Processes* (Eds. N. Markatos, D. Tatchell, M. Cross and N. Rhodes), pp.425–432. Springer, Berlin (1986).
- [32] V. R. Voller, A numerical method for analysis of solidification in heat and mass transfer systems. In *Numerical Methods in Thermal Problems* (Eds. R.W. Lewis *et al.*), Vol.5, pp.693–704. Pineridge Press, Swansea (1987).
- [33] V.R. Voller, M. Cross and N.C. Markatos, An enthalpy method for convection/diffusion phase change, *Int. J. Numer. Methods Engng.* **24**, 271–284 (1987).
- [34] V.R. Voller and C. Prakash, A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 1709–1719 (1987).
- [35] A.D. Brent, V.R. Voller and K.J. Reid, Enthalpy-porosity technique for modelling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal, *Numer. Heat Transfer* **13**, 297–318 (1988).
- [36] S.E. Hibbert, N.C. Markatos and V.R. Voller, Computer simulation of moving-interface, convective, phase-change processes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 1785–1795 (1988).
- [37] C. Prakash and V. Voller, On the numerical solution of continuum mixture model equations describing binary solid-liquid phase change, *Numer. Heat Transfer* **15B**, 171–189 (1989).
- [38] V.R. Voller, A.D. Brent and C. Prakash, The modelling of heat, mass and solute transport in solidification systems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 1719–1731 (1989).

- [39] V.R. Voller, A.D. Brent and C. Prakash, Modelling the mushy region in a binary alloy, *Appl. Math. Modelling* **14**, 320–326 (1990).
- [40] C.R. Swaminathan and V.R. Voller, A general enthalpy method for modelling solidification processes, UMSI 91/167, Research Report of the Supercomputer Institute at the University of Minnesota (1991).
- [41] V. Voller and C. Swaminathan, Fixed grid solution of phase change problems, *J. Theoret. Appl. Mechanics* **XXIII**, 30–40 (1992).
- [42] C. Gau and R. Viskanta, melting and solidification of a pure metal on a vertical wall, *ASME J. Heat Transfer* **108**, 174–181 (1986).
- [43] D.J. McDaniel and N. Zabaras, A least-squares front-tracking finite element method analysis of phase change with natural convection, *Int. J. Numer. Methods Engng.* **37**, 2755–2777 (1994).
- [44] A.D. Brent, Numerical simulation of tin solidification under the influence of natural convection in a thick walled annular crucible, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* **16**, 693–701 (1989).
- [45] A.G. Churbanov, A.N. Pavlov and P.N. Vabishchevich, Operator-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids. Part 1: First-order schemes, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **21**, 617–640 (1995).
- [46] A.G. Churbanov, A.N. Pavlov and P.N. Vabishchevich, Viscous flow prediction using non-staggered grids. In: *Experimentation, Modelling and Computation in Flow, Turbulence and Combustion* (Eds. J.A. Désidéri, B.N. Chetverushkin, Y.A. Kuznetsov, J. Périaux and B. Stoufflet), Vol.1, pp.221–232. Wiley, Chichester, 1996.
- [47] P.N. Vabishchevich, A.N. Pavlov and A.G. Churbanov, Numerical methods for unsteady incompressible flows using primitive variables and non-staggered grids. *Matematicheskoe Modelirovanie (Mathematical Modeling)* **8**, 81–108 (1996) (in Russian).
- [48] A.G. Churbanov, A.N. Pavlov, P.N. Vabishchevich and V.V. Chudanov, Operator-splitting schemes for the incompressible Navier-Stokes equations with consistent approximation of operators. In: *Book of Abstracts of International Conference on Computational Modelling and Computing in Physics*, 16–21 September, 1996, Dubna, Russia (Eds. E.P. Zhidkov *et al.*), p.54. JINR, Dubna, 1996.
- [49] P.K. Khosla and S.G. Rubin, A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computers&Fluids* **2**, 207–209 (1974).

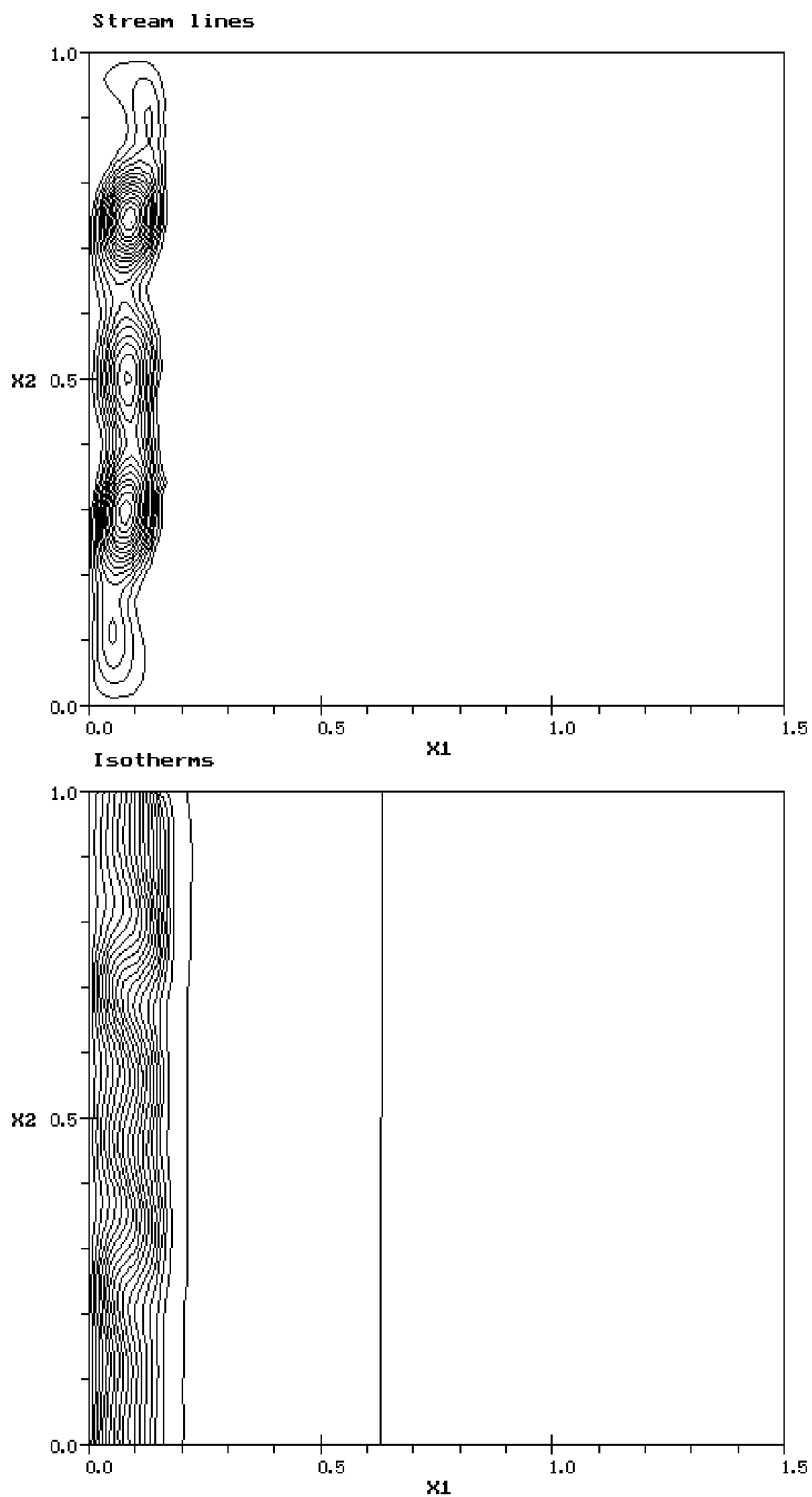


Рис. 2: Картина течения и теплового поля,  $t = 2$  мин.



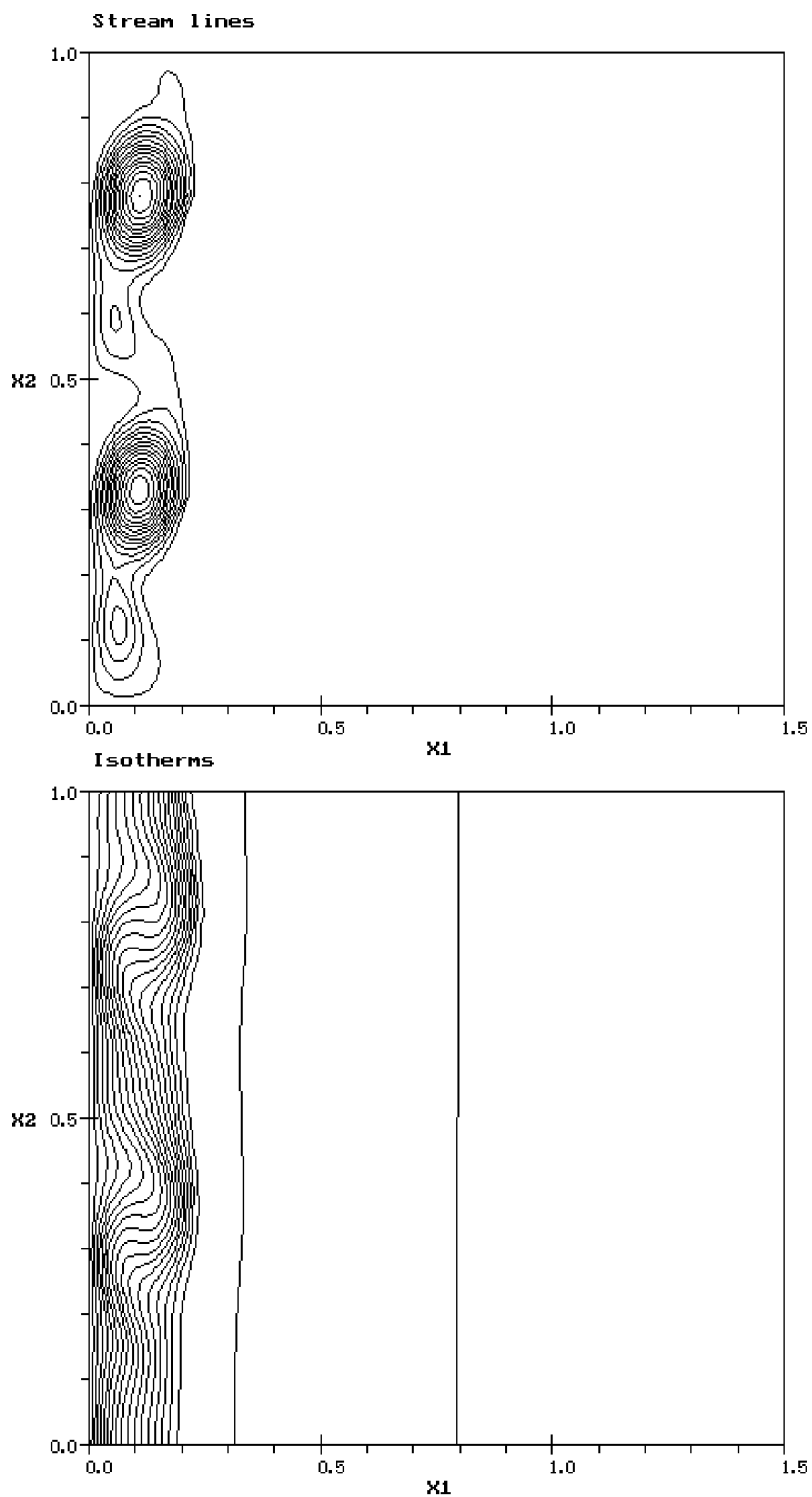


Рис. 3: Картина течения и теплового поля,  $t = 3$  мин.

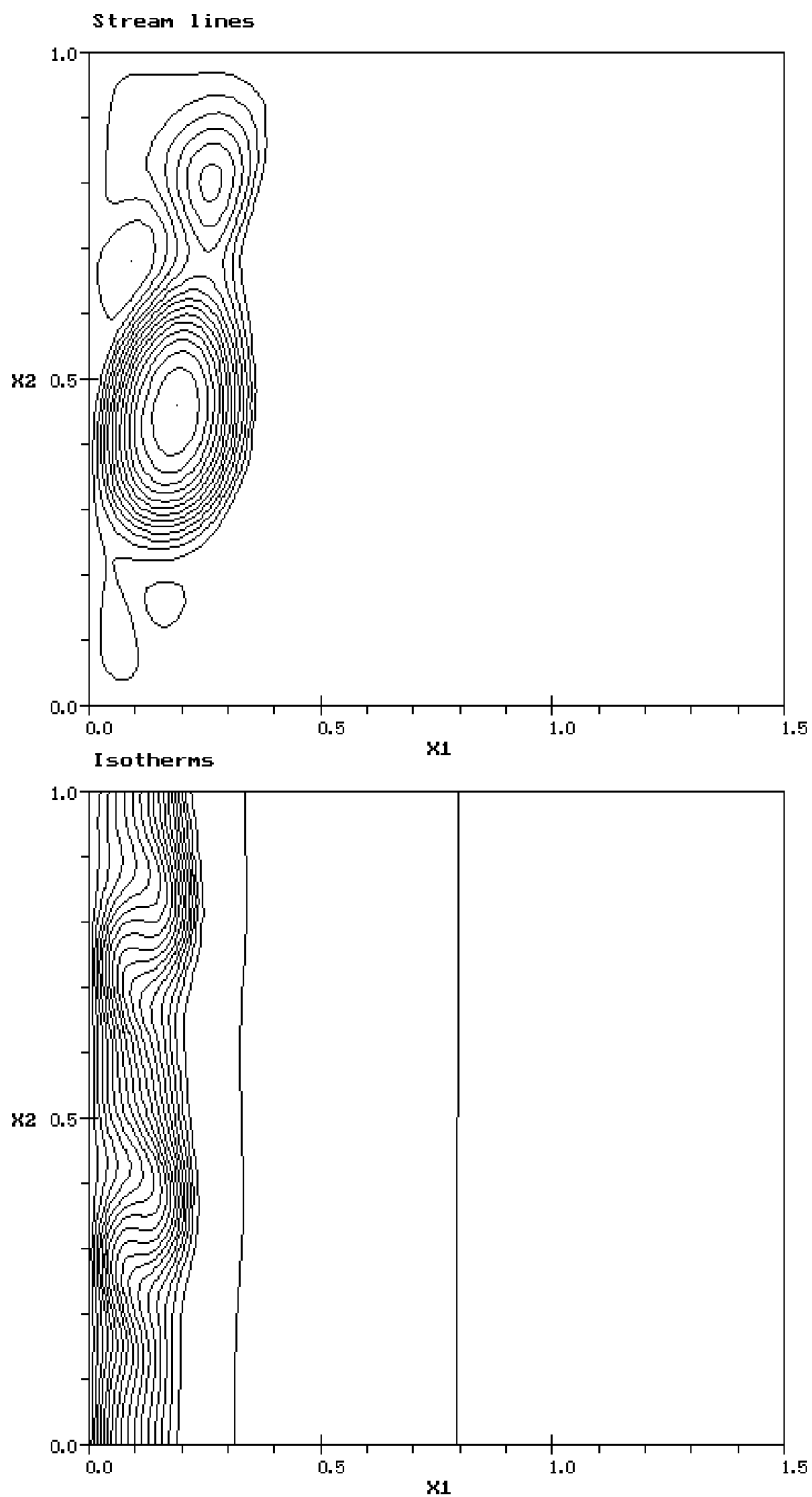


Рис. 4: Картина течения и теплового поля,  $t = 6$  мин.

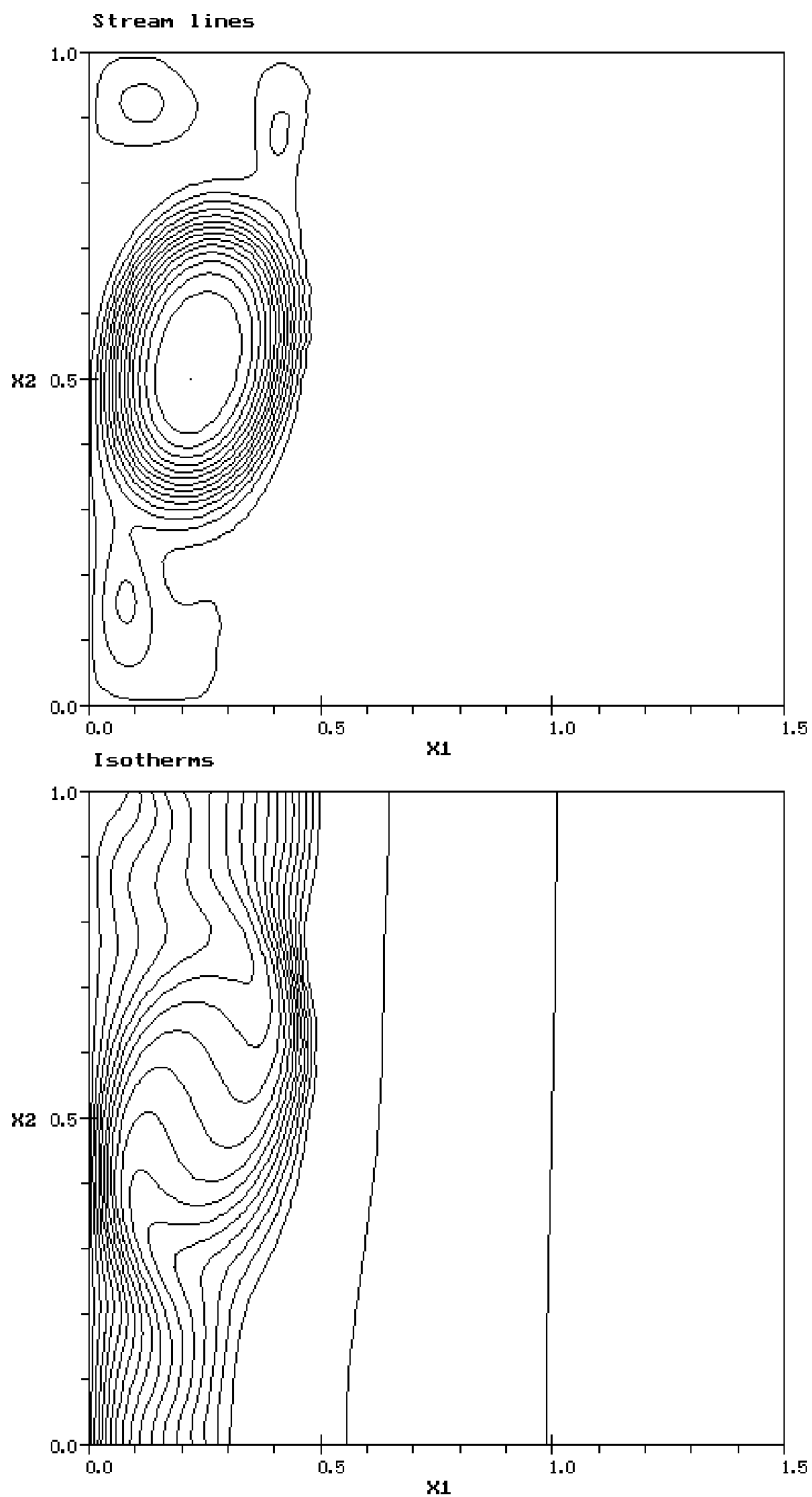


Рис. 5: Картина течения и теплового поля,  $t = 8$  мин.

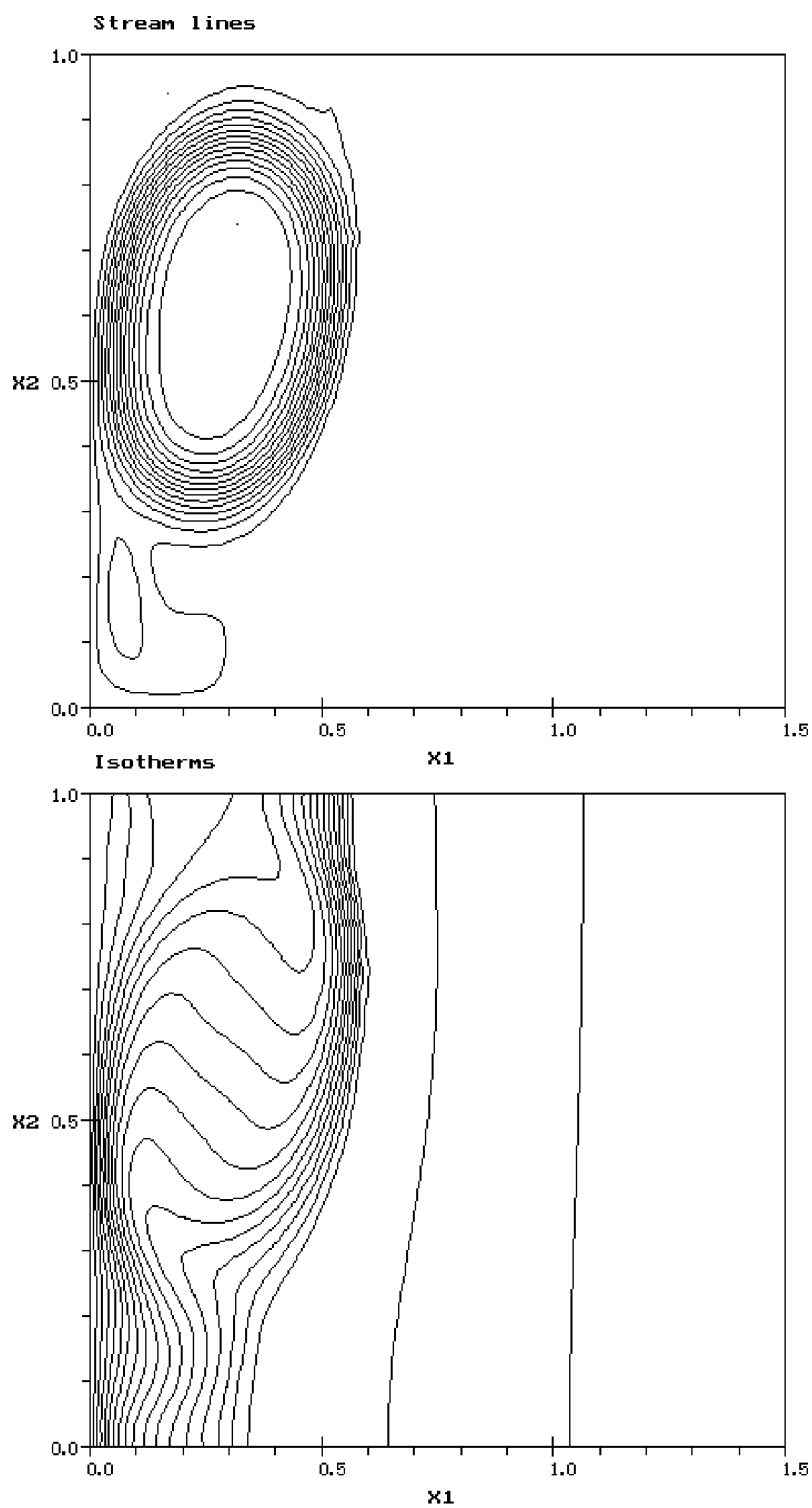


Рис. 6: Картина течения и теплового поля,  $t = 10$  мин.

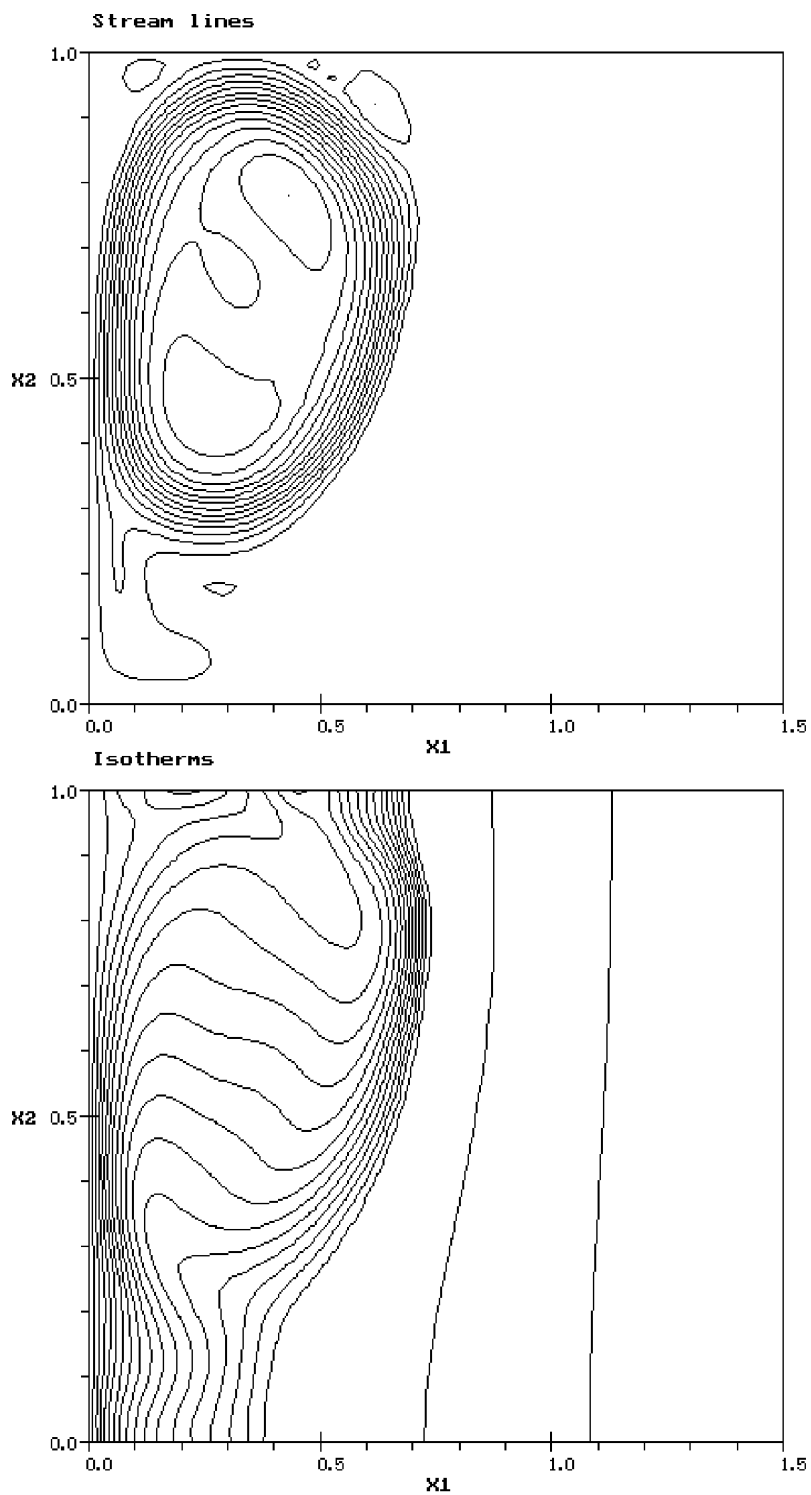


Рис. 7: Картина течения и теплового поля,  $t = 12\frac{1}{2}$  мин.

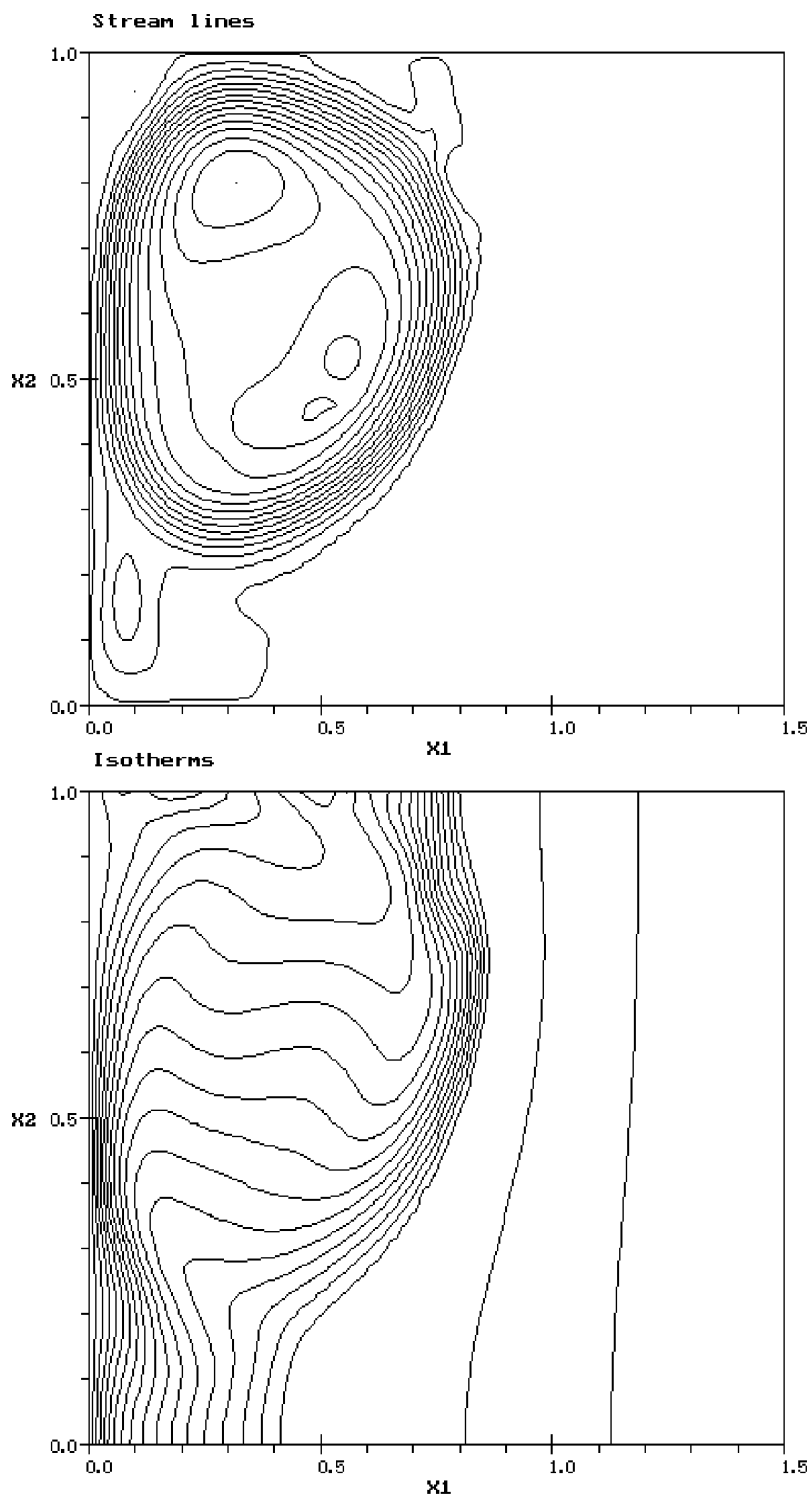


Рис. 8: Картина течения и теплового поля,  $t = 15$  мин.

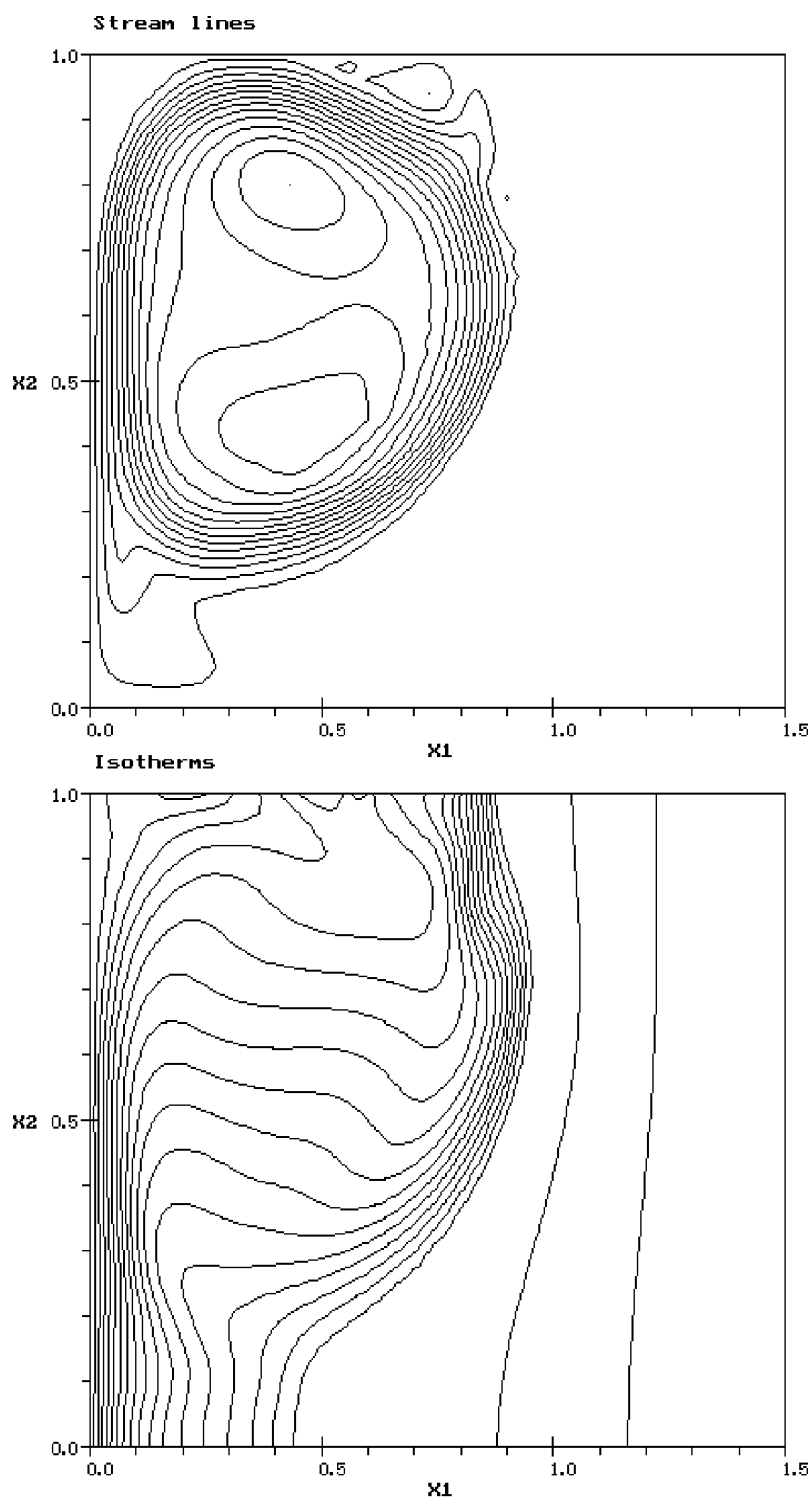


Рис. 9: Картина течения и теплового поля,  $t = 17$  мин.

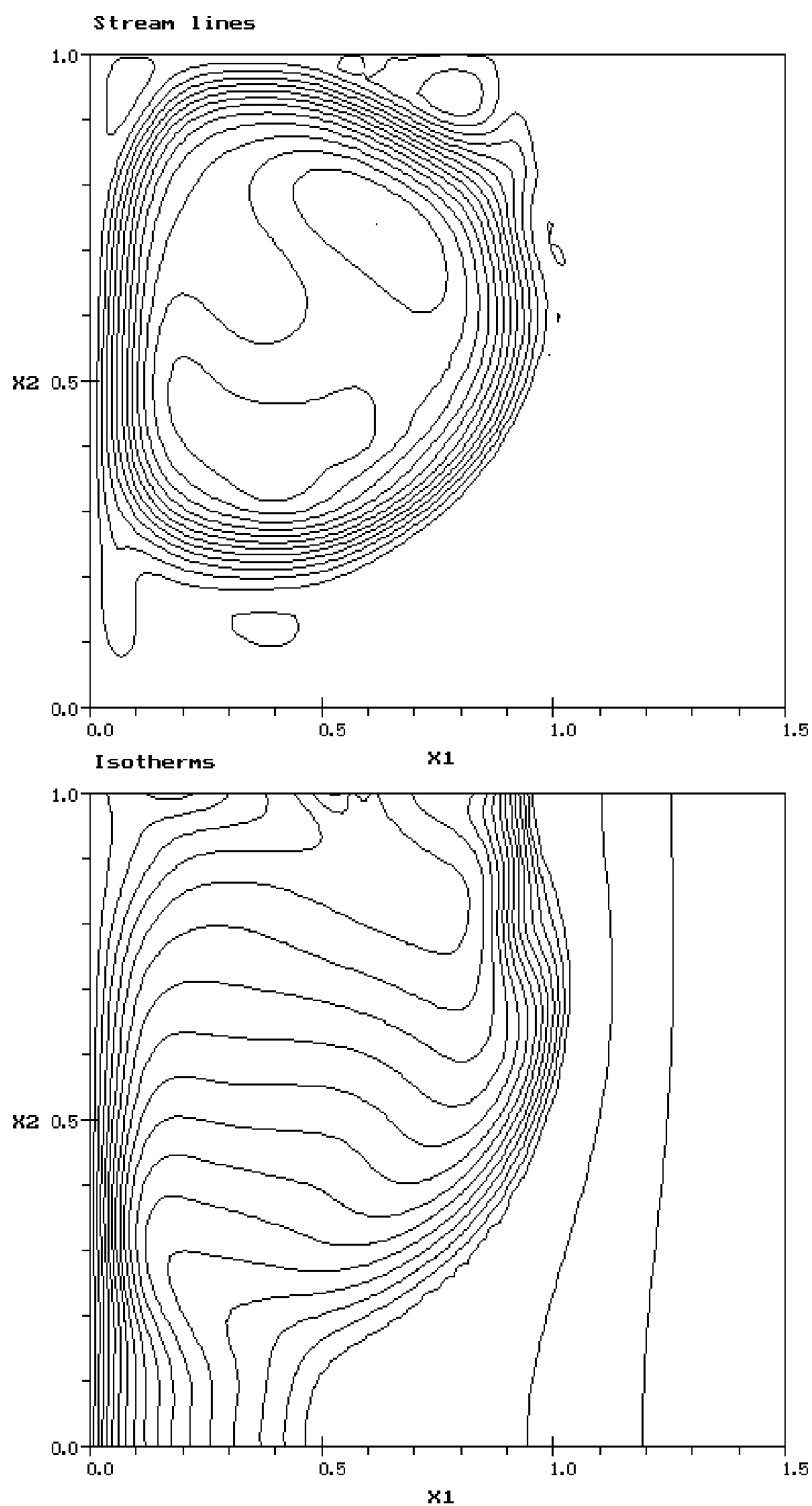


Рис. 10: Картина течения и теплового поля,  $t = 19$  мин.



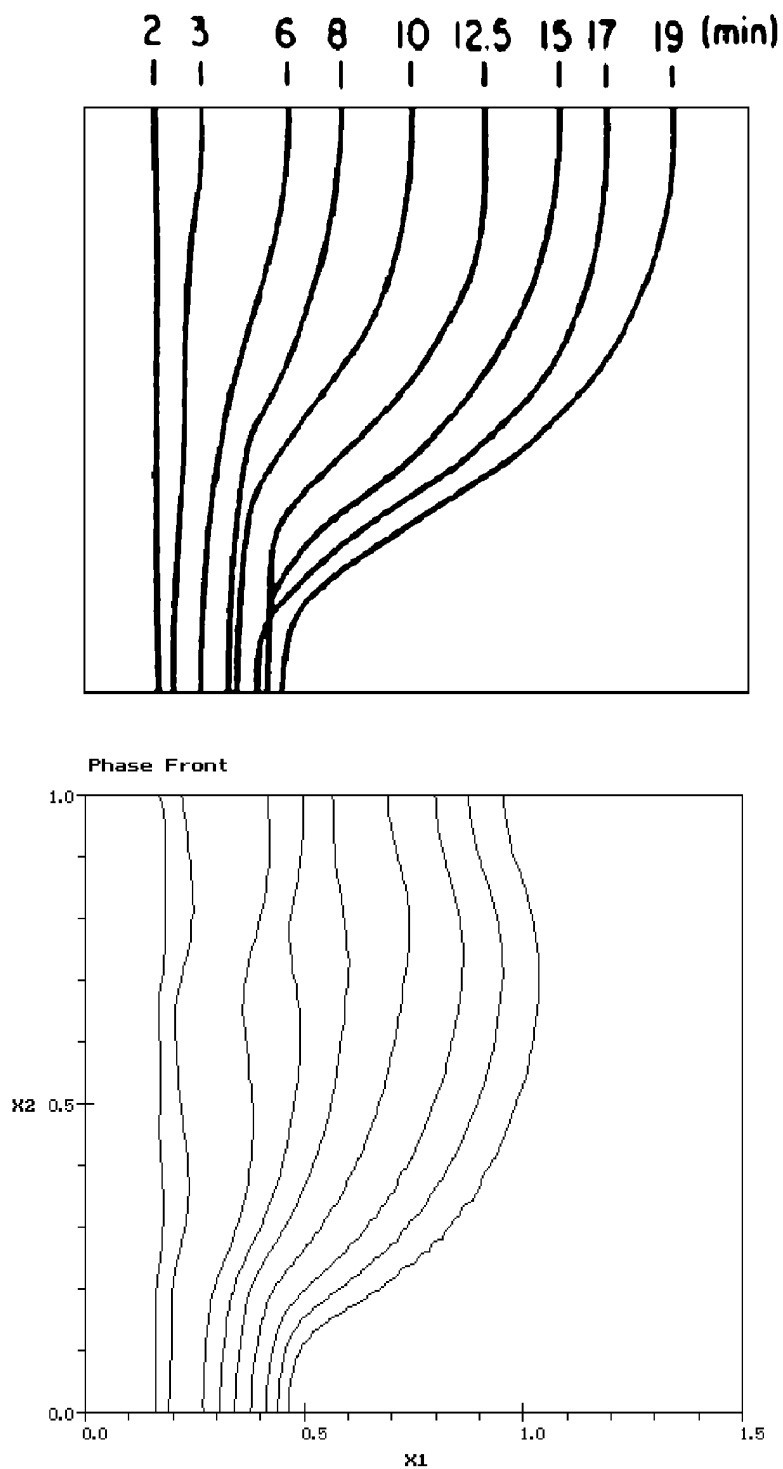


Рис. 11: Экспериментальные (верхний рисунок) и расчетные (нижний) профили фазового перехода в указанные моменты времени.