

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN ACADEMY OF
SCIENCES

**ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО
РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**

**NUCLEAR
SAFETY INSTITUTE**

Препринт № NSI-33-94

Preprint NSI-33-94

Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В.

**Численное моделирование
свободной конвекции жидкости
в пористой среде**

Москва
1994

Moscow
1994

Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ. Препринт № NSI-33-94. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 1994. 22 с.

Аннотация

В работе описан вычислительный алгоритм для двумерной задачи конвекции жидкости в пористой среде в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура". Реализация используемой схемы расщепления основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Приведены данные расчетов по тестовой задаче о свободноконвективном движении жидкости в пористой среде в полости квадратного сечения с боковым подогревом.

©ИБРАЭ РАН, 1994

Aksenova A.E., Vabishchevich P.N., Chudanov V.V. NUMERICAL SIMULATION OF THE NATURAL CONVECTION IN POROUS MEDIUM (in Russian). Preprint NSI-33-94. Moscow: Nuclear Safety Institute, 1994. 22 p.

Abstract

A numerical algorithm is described in the work for 2D convection problem of fluid in porous medium in the stream function — vorticity — temperature formulation. Numerical implementation of the operator-splitting scheme used in calculations is based on the solution of elliptic grid problems at every time-level. The algorithm validation is conducted on the benchmark solutions for buoyancy-driven flow of fluid in a square cavity with side walls of different temperatures.

©Nuclear Safety Institute, 1994

Численное моделирование свободной конвекции жидкости в пористой среде

*Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В.**

Институт Проблем Безопасного Развития Атомной Энергетики РАН
Большая Тульская 52, Москва 113191, Россия

Аннотация

В работе описан вычислительный алгоритм для двумерной задачи конвекции жидкости в пористой среде в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”. Реализация используемой схемы расщепления основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Приведены данные расчетов по тестовой задаче о свободноконвективном движении жидкости в пористой среде для полости квадратного сечения с боковым подогревом.

1 Введение

В работе строится линеаризованная разностная схема для решения задачи конвекции жидкости в пористой среде в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”. Аппроксимация конвективных слагаемых проводится со вторым порядком на основе центральных разностей. Для реализации разностной схемы расщепления на каждом временном слое решаются сеточные эллиптические задачи для нахождения функции тока, вихря скорости, температуры.

В качестве тестовой задачи в литературе обычно рассматривается задача о свободноконвективных течениях жидкости в полости квадратного сечения, заполненной пористой средой. Моделирование таких течений проводится в различных приближениях [1]–[5]. Как показывают натурные и численные эксперименты, использование классического приближения Дарси для моделирования конвективных течений в пористой среде не всегда оправдано. Поэтому в настоящей работе для анализа конвекции жидкости в пористой полости с боковым подогревом привлекается наиболее полная модель Дарси с расширением Бринкмана-Форхгеймера.

Расчеты выполнены на более подробных сетках и для более широких диапазонов определяющих безразмерных параметров.

2 Модельная задача

Рассматривается двумерная задача конвекции в пористой среде для случая полости квадратного сечения. Вертикальные стенки полости поддерживаются при различных постоянных температурах, верхняя и нижняя грани считаются теплоизолированными. Термофизические свойства жидкости предполагаются неизменяемыми с учетом температурного расширения в модели Буссинеска. Пористая среда считается гомогенной и изотропной, кроме того она насыщена жидкостью, т.е. жидкость находится в локальном термодинамическом равновесии с твердой матрицей. Задача рассматривается в нестационарной постановке.

Пусть $\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l, \alpha = 1, 2\}$ — область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Для описания процессов тепло- и массопереноса в насыщенной пористой среде используются уравнения Дарси с расширением Бринкмана-Форхгеймера. Так для скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ имеем уравнение движения вида:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} \right) = -\operatorname{grad} p + \mu_{eff} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \left(\frac{\mu_f}{K} + \frac{\rho C}{\sqrt{K}} |\mathbf{v}| \right) \mathbf{v} + \rho g \beta (u - u_c), \quad (1)$$

*E-mail: pbl@ibrae.msk.su

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

где p — давление, μ_{eff} — эффективная динамическая вязкость, μ_f — динамическая вязкость жидкости, K — проницаемость пористой среды, C — коэффициент инерции, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, β — коэффициент объемного расширения, u — температура, u_c — температура холодной стенки. Уравнение (1) дополняется уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Поле температур в области Ω , заполненной насыщенной пористой средой, описывается уравнением теплопроводности в виде

$$c_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} u \right) = k_{eff} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad (3)$$

где c_f — коэффициент удельной теплоемкости жидкости, k_{eff} — коэффициент теплопроводности.

Рассматриваемая область представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на границах полости $\partial\Omega$ задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$\mathbf{v}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Нижняя и верхняя части границы считаются теплоизолированными и, следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, 1, \quad 0 < x_1 < 1. \quad (5)$$

Левая и правая границы изотермичны, т.е.:

$$u(0, x_2, t) = \chi_0 = \text{const}, \quad u(1, x_2, t) = \chi_1 = \text{const}. \quad (6)$$

В начальный момент времени жидкость неподвижна и поэтому имеет место следующее начальное условие для скорости

$$\mathbf{v}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega(0), \quad (7)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = \chi_1 + \frac{x}{l} (\chi_0 - \chi_1), \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Таким образом, задача (1)–(8) описывает свободную конвекцию тепла в области Ω , заполненной пористой средой, на любой момент времени $t > 0$. Вычислительный алгоритм ее приближенного решения строится на базе переменных “функция тока, вихрь скорости”. Для этого предварительно проводится обезразмеривание задачи в предположении, что:

1. инерционный коэффициент C , представляющий собой функцию микроструктуры пористой среды, для большинства сред постоянен и равен 0.55 [6];

2. $\mu_{eff} = \mu_f$.

Компоненты скорости выражаются через функцию тока $\psi(x, t)$ следующим образом:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (9)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполняется. Для вихря скорости справедливо соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (10)$$

Для унификации записи слагаемых конвективного переноса, также как и в работах [7],[8] вводится для произвольного вектора $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ дифференциальный оператор $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ таким образом, что:

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{V}_\alpha(q_\alpha), \quad (11)$$

$$\mathcal{V}_\alpha(q_\alpha)z = \frac{1}{2} \left(q_\alpha \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (q_\alpha z) \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

С учетом (9)–(11) из уравнения движения (1) будем иметь следующее выражение для вихря скорости в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})w - \text{Pr} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Da}} + \frac{C}{\sqrt{\text{Da}}} |\mathbf{v}| \right) w - \text{Ra Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (12)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

где числа Релея, Прандтля и Дарси для задачи (1)–(8) определяется с помощью соотношений

$$\text{Ra} = \frac{\rho g \beta (u_h - u_c) L^3 c_f}{\mu_f k_{eff}},$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu_f c_f}{k_{eff}}$$

и

$$\text{Da} = \frac{K}{L^2},$$

соответственно. В этих выражениях использованы следующие обозначения: u_h — температура горячей стенки, L — длина полости. Для функции тока имеем уравнение Пуассона

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = w, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (13)$$

В безразмерных переменных уравнение для температуры имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{V}(\mathbf{v})u = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad (14)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T.$$

Здесь безразмерная температура определяется соотношением $(u - \chi_1)/(\chi_0 - \chi_1)$.

Система уравнений (12)–(14) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4)–(8). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω записываются в виде

$$\psi(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (16)$$

где n — внешняя нормаль к $\partial \Omega$. Из условия (7) следует

$$\psi(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (17)$$

И, наконец, в безразмерных переменных изотермические граничные условия имеют вид

$$u(0, x_2, t) = 1, \quad u(1, x_2, t) = 0. \quad (18)$$

Остальные условия для температуры (см. (5),(8)) остаются без изменений.

3 Дискретизация по пространству

В области Ω введем равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$ с шагами h_1 и h_2 , соответственно. Множество ω_h — содержит все внутренние узлы, т.е. $\omega_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = 1, \alpha = 1, 2\}$, а $\partial\omega_h$ — граничные узлы.

Для написания разностной схемы воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [9]. Для направленных разностей это будут соотношения вида:

$$\begin{aligned} w_{x_\alpha} &= \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha)}{h_\alpha}, \\ w_{\bar{x}_\alpha} &= \frac{w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{h_\alpha}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2,$$

а для центральных разностей

$$w_{x_\alpha}^\circ = \frac{1}{2}(w_{x_\alpha} + w_{\bar{x}_\alpha}) = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Определим сеточный оператор Лапласа на множестве сеточных функций $y \in H$, обращающихся в нуль на границе сетки, как:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (19)$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве H введем скалярное произведение

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)z(x)h_1 h_2.$$

Заметим, что в H оператор Λ самосопряжен и положительно определен [10], т.е. $\Lambda = \Lambda^* > 0$.

Для аппроксимации конвективных слагаемых определим вектор

$$\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad w_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (20)$$

Это позволяет нам записать конвективный перенос вихря в виде

$$\mathcal{V}(\mathbf{v})w = -\mathcal{V}(\mathbf{w})\psi, \quad (21)$$

т.е. интерпретировать конвективный перенос вихря скорости как некий эффективный перенос функции тока. Обращение к такой форме записи обусловлено тем, что для любых векторов \mathbf{w} будет выполняться условие $(\mathcal{V}(\mathbf{v})w, \psi) = 0$.

Для приближенных решений будем использовать те же обозначения, что и для точных. Тогда с учетом соотношений (11), (20)–(21) для аппроксимации конвективных слагаемых будем иметь:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{w}) &= \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha(w_\alpha), \\ V_1(w_1)\psi &= \frac{1}{2} \left(w_{x_2}^\circ \psi_{x_1}^\circ + \left(w_{x_2}^\circ \psi \right)_{x_1}^\circ \right), \\ V_2(w_2)\psi &= -\frac{1}{2} \left(w_{x_1}^\circ \psi_{x_2}^\circ + \left(w_{x_1}^\circ \psi \right)_{x_2}^\circ \right). \end{aligned} \quad (22)$$

При такой аппроксимации конвективного переноса

$$(V(\mathbf{w})\psi, \psi) = 0, \quad (23)$$

т.е. в гильбертовом пространстве H оператор $V(\mathbf{w})$ кососимметричен ($V(\mathbf{w}) = -V^*(\mathbf{w})$). Аналогичная аппроксимация $\mathcal{V}(\mathbf{v})$ используется для конвективных слагаемых в уравнении для температуры.

Аппроксимация уравнений (12),(13) с использованием формулы Тома [11] для вихря скорости во внутренних узлах сетки приводит к дифференциально-разностному уравнению вида:

$$\frac{d}{dt}\Lambda\psi - V(\mathbf{w})\psi + \text{Pr}\Lambda^2\psi + \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Da}} + \frac{C}{\sqrt{\text{Da}}}\|\mathbf{v}\|\right)\Lambda\psi + \rho(x)\psi = \text{Ra Pr } u_{x_1}, \quad (24)$$

$$x \in \omega_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В этом уравнении сеточная функция $\rho(x)$ при граничных условиях Тома для вихря скорости определяется соотношением

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha(x_\alpha),$$

$$\rho_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0, & h_\alpha < x_\alpha < l_\alpha - h_\alpha, \\ \frac{2}{h_\alpha^4}, & x_\alpha = h_\alpha, \quad l_\alpha - h_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Принимая во внимание особенности вычислительной реализации, удобно переписать уравнение (24) в виде

$$\frac{d}{dt}\Lambda\psi + (A_1 + A_2)\psi = \text{Ra Pr } u_{x_1}, \quad (25)$$

где

$$A_1 = \text{Pr}\Lambda^2 + \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Da}} + \frac{C}{\sqrt{\text{Da}}}\|\mathbf{v}\|\right)\Lambda, \quad A_2 = -V(\mathbf{w}) + \rho(x)E. \quad (26)$$

Учитывая свойство кососимметричности оператора $V(\mathbf{w})$ (см. (23)), в (26) имеем $A_1 = A_1^* > 0$, а $A_2 \geq 0$ при любых \mathbf{w} .

Для аппроксимации уравнения теплопроводности выделим множество узлов $\omega'_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, i_2 = 0, 1, \dots, N_2, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Для сеточных функций y , обращающихся в нуль в узлах вне сетки ω'_h , определим гильбертово пространство H' со скалярным произведением

$$(y, z)' = \sum_{x \in \omega'_h} y(x)z(x)h_1h_2(x_2),$$

где $h_2(x_2) = h_2$ при $0 < x_2 < l_2$ и $h_2(x_2) = 0.5 h_2$ при $x_2 = 0$ и $x_2 = l_2$.

Сеточный оператор Лапласа с учетом смешанных граничных условий представим в виде

$$\Lambda'y = \Lambda_1 y + \Lambda'_2 y, \quad x \in \omega'_h, \quad (27)$$

где

$$\Lambda'_2 y = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}, & x_2 = 0, \\ -\frac{y_{\bar{x}_2 x_2}}{2}, & 0 < x_2 < l_2, \\ \frac{2}{h_2} y_{\bar{x}_2}, & x_2 = l_2. \end{cases} \quad (28)$$

В гильбертовом пространстве H' оператор Λ' , определяемый соотношениями (27)–(28), самосопряжен и положительно определен [10] ($\Lambda' = (\Lambda')^* > 0$).

С учетом вышесказанного, уравнение теплопроводности (14) принимает вид

$$\frac{du}{dt} + V(\mathbf{v})u + \Lambda'u = \varphi(\mathbf{v}, x, t), \quad (29)$$

$$x \in \omega'_h, \quad 0 < t \leq T.$$

Сеточная функция $\varphi(\mathbf{v}, x, t)$ в уравнении (29) определяется в соответствии с неоднородным граничным условием (18) и отлична от нуля только в узлах примыкающих к левой границе.

4 Разностные схемы расщепления

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$: $\omega_\tau = \{t | t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau, N_\tau\tau = T\}$ и пусть $y_n = y(t_n)$. Разностная схема для системы уравнений (24), (29) основана на естественной линеаризации, когда операторы конвективного переноса $V(\mathbf{w}), V(\mathbf{v})$ — определяются решением на предыдущем временном слое. Для решения задачи используется чисто неявная факторизованная схема (аналог схемы Дугласа-Рэкфорда).

На первом шаге рассчитывается вихрь скорости $w_{n+1/2} = \Lambda\psi_{n+1/2}$ из уравнения

$$\frac{\Lambda\psi_{n+1/2} - \Lambda\psi_n}{\tau} - V(\mathbf{w}_n)\psi_n + \text{Pr} \Lambda^2 \psi_{n+1/2} + \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Da}} + \frac{C}{\sqrt{\text{Da}}} |\mathbf{v}| \right) \Lambda\psi_{n+1/2} + \rho(x)\psi_n = \text{Ra} \text{Pr}(u_{n+1})_{x_1}, \quad (30)$$

$$x \in \omega_h.$$

т.е. конвективный перенос и граничное условие для вихря берутся с предыдущего временного слоя. С учетом введенных обозначений уравнение (30) может быть представлено в виде

$$\frac{w_{n+1/2} - w_n}{\tau} - V(\mathbf{w}_n)\psi_n + \text{Pr} \Lambda w_{n+1/2} + \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Da}} + \frac{C}{\sqrt{\text{Da}}} |\mathbf{v}| \right) w_{n+1/2} + \rho(x)\psi_n = \text{Ra} \text{Pr}(u_{n+1})_{x_1}, \quad (31)$$

$$x \in \omega_h.$$

На втором шаге проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для вихря скорости:

$$\frac{\Lambda\psi_{n+1} - \Lambda\psi_{n+1/2}}{\tau} + \left(\rho(x) - V(\mathbf{w}_n) \right) (\psi_{n+1} - \psi_n) = 0. \quad (32)$$

Таким образом, при переходе на новый временной слой вихрь скорости определяется как решение самосопряженной задачи (31), а для определения функции тока имеем несамосопряженную задачу (32). Для вычисления температуры во внутренних узлах сетки используется линеаризованное разностное уравнение вида:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + V(\mathbf{v}_n)u_{n+1} + \Lambda' u_{n+1} = \varphi(\mathbf{v}_n, x, t_n), \quad x \in \omega'_h.$$

Соответствующие сеточные эллиптические задачи решаются итерационно.

5 Результаты расчетов

Сначала представим результаты расчетов стационарного решения для чисел Релея $\text{Ra} = 10^5, 10^8, 10^{12}$ и $\text{Pr} = 1$ на равномерной сетке 81×81 . Стационарное решение было получено методом установления. Расчеты были выполнены для чисел Дарси $\text{Da} = 10^{-1}, 10^{-4},$ и 10^{-8} , соответственно.

При обработке данных расчетов основное внимание уделялось минимальной величине функции тока, которая определяет интенсивность конвективного перемешивания, и тепловым потокам на боковые грани. Ниже в таблицах 1-6 приводятся следующие важные параметры, характеризующие стационарное решение:

- $|\psi|_{mid}$ — абсолютная величина функции тока в центре полости,
- $|\psi|_{max}$ — максимум модуля функции тока во всей полости,
- v_{1max} — максимум горизонтальной скорости на среднем вертикальном сечении,
- v_{2max} — максимум вертикальной скорости на среднем горизонтальном сечении,
- Nu_0 — среднее значение числа Нуссельта на левой грани,
- Nu_{max} — максимальное значение числа Нуссельта на левой грани полости,
- Nu_{min} — минимальное значение числа Нуссельта на этой грани.

На рис.1 – 3 показаны изотермы и линии тока для стационарного решения на сетке 81×81 для различных чисел Ra и Da . Как показывают вычислительные эксперименты, с ростом числа Релея наблюдается изменение ориентации линий тока. Так если при $\text{Ra} = 10^5$ линии

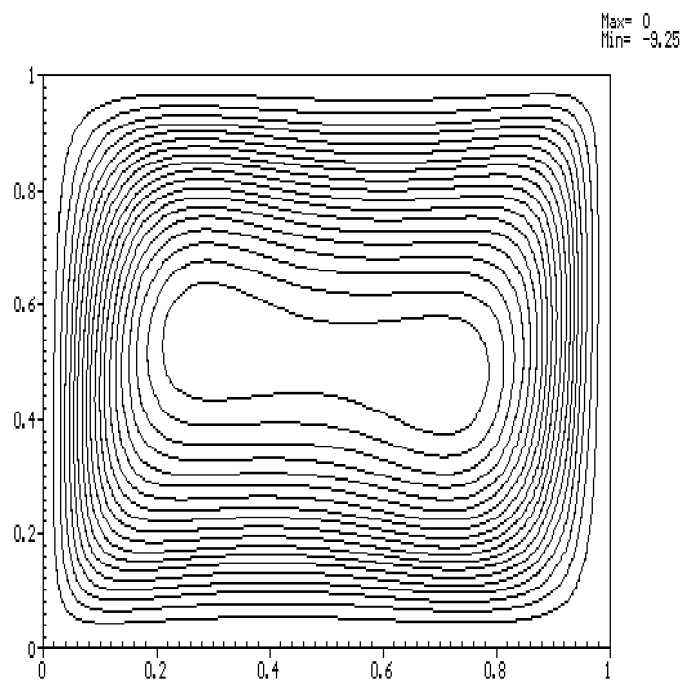
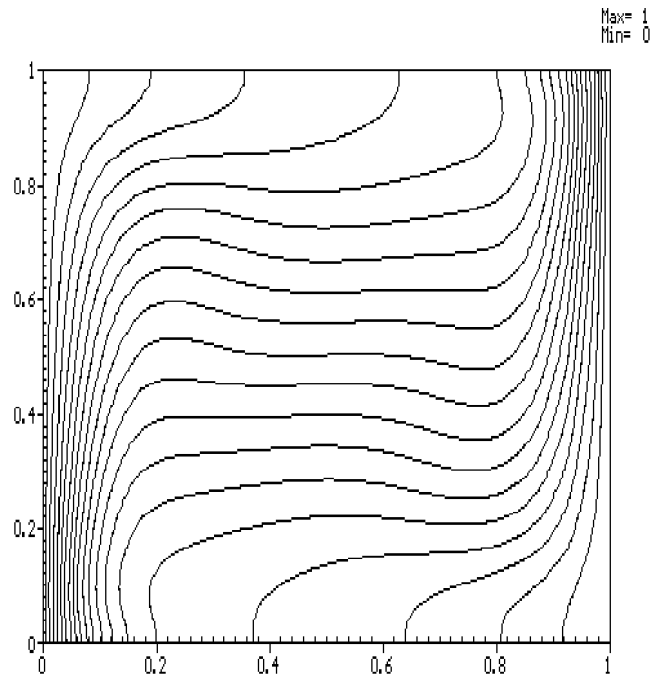


Рис. 1: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^5$, $Da = 10^{-1}$.

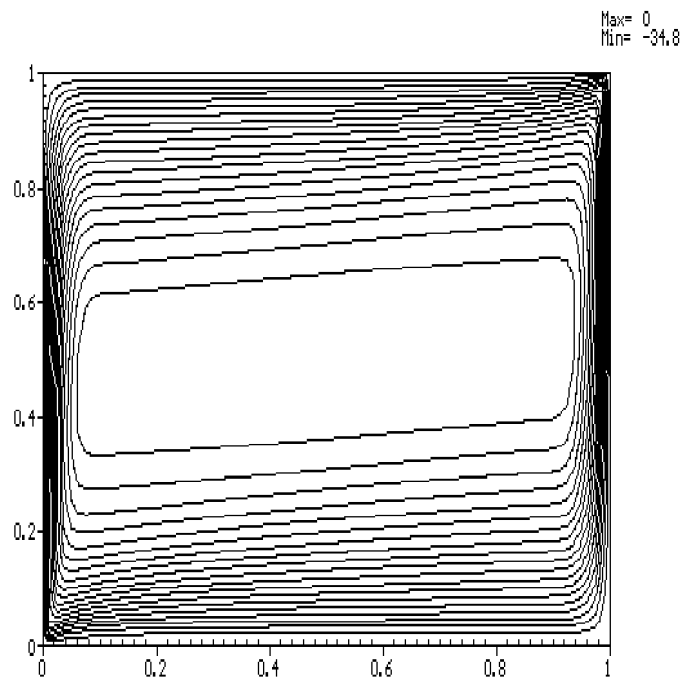
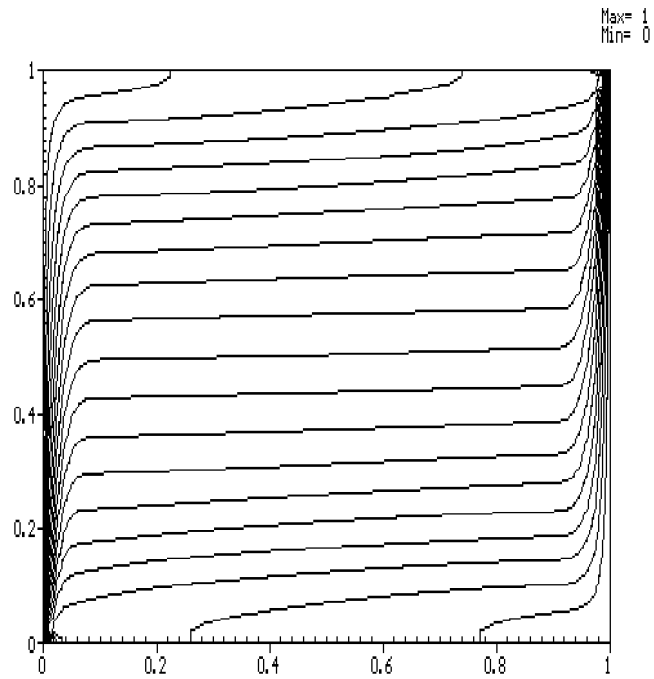


Рис. 2: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^8$, $Da = 10^{-4}$.

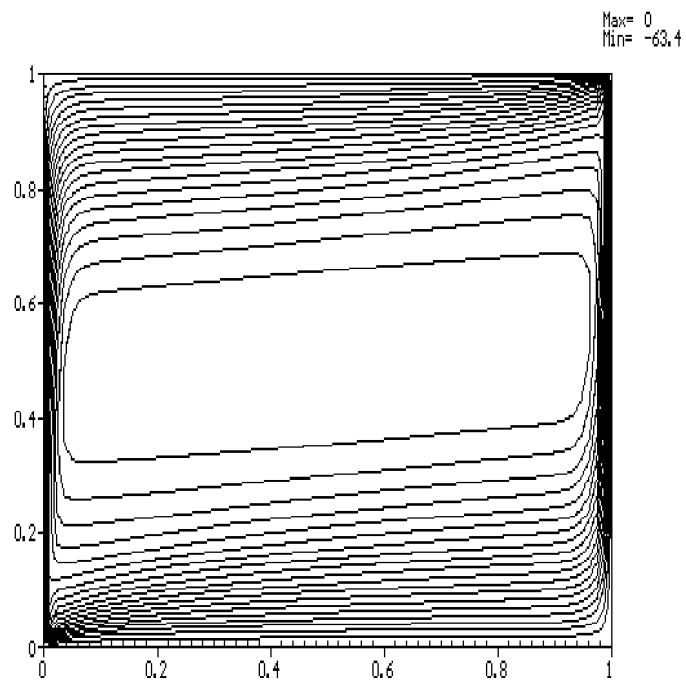
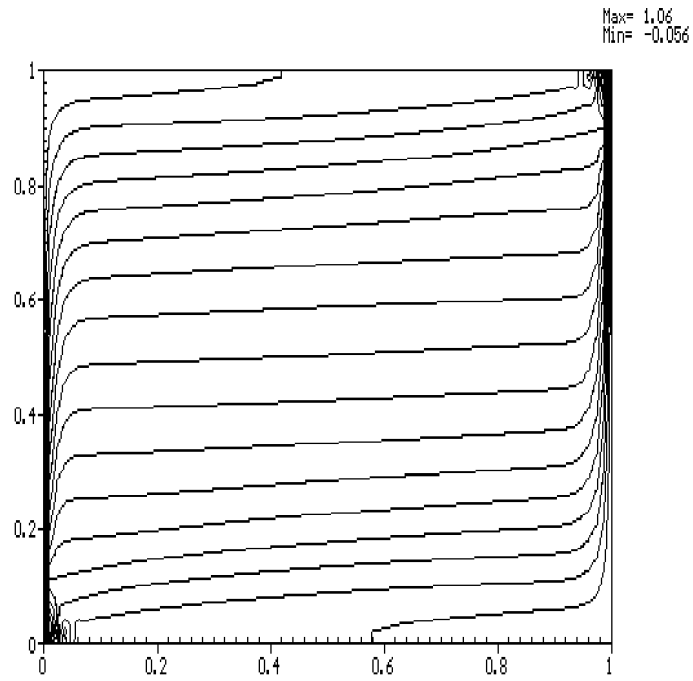


Рис. 3: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^{12}$, $Da = 10^{-8}$.

Табл. 1:

Ra	Da	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu ₀	Nu _{max}	Nu _{min}
10 ⁵	10 ⁻¹	8.989	9.254	30.29	63.44	4.4	7.999	0.632
10 ⁸	10 ⁻⁴	34.828	34.829	158.73	814.21	18.8	66.390	0.428
10 ¹²	10 ⁻⁸	63.377	63.378	307.69	2189.48	28.9	84.479	0.405

тока вытянуты относительно линии, соединяющей левый верхний и правый нижний координатные углы, то с ростом числа Релея они разворачиваются относительно второй диагонали квадрата.

Поскольку представленное на рисунке 3 поле температур не является монотонным вблизи боковых стенок, был проведен дополнительный расчет на неравномерной сетке для случая Ra = 10¹², Da = 10⁻⁸. При этом использовались одинаковые по обоим направлениям сетки с максимальным числом шагов вблизи центра полости и минимальным около границы. Отношение двух соседних шагов равнялось одной и той же величине q (коэффициенту сгущения). Проведение расчета на сгущающейся сетке позволило существенно уточнить решение, особенно его экстремальные характеристики, и избавиться от немонотонности в приграничном слое. Результаты расчетов на неравномерной сетке приведены в таблице 2, картина течения и поле температур показаны на рисунке 4.

Табл. 2: Ra = 10¹², Da = 10⁻⁸

сетка	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu ₀	Nu _{max}	Nu _{min}
равн.	63.377	63.378	307.69	2189.48	28.9	84.479	0.405
неравн.	65.858	65.858	307.59	3192.69	36.4	163.768	0.181

Влияния неравномерных сеток на точность получаемых результатов иллюстрируется также данными из табл. 3. Расчеты на последовательности сгущающихся сеток были выполнены для случая Ra = 10⁵, Da = 10⁻¹.

Табл. 3: Ra = 10⁵, Da = 10⁻¹, N = 80

h_{max}/h_{min}	q	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu ₀	Nu _{max}	Nu _{min}
1	0.999	8.989	9.254	30.29	63.44	4.40	7.999	0.632
3	0.968	8.954	9.216	30.38	63.77	4.39	7.947	0.633
10	0.942	8.951	9.218	30.57	64.00	4.39	7.929	0.633
сетка	q	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu ₀	Nu _{max}	Nu _{min}
161	0.999	8.946	9.211	30.10	63.63	4.39	7.936	0.633

Сравнение с приведенными здесь же данными на существенно более подробной сетке 161 × 161 позволило сделать следующий вывод: правильно подобранная неравномерная сетка (коэффициент сгущения q) позволяет существенно повысить точность расчетов.

Была выполнена серия расчетов для чисел Ra = 10⁵, 10⁶, 10⁷ с коэффициентом сгущения сетки $q = 0.942$ (см. табл. 4). Числа Дарси для этих расчетов выбирались с учетом соотношения Ra Da = 10⁴.

Картины течения для каждого из приведенных в таблице 4 случаев представлены на рис. 5 – 7. Сравнение поведения эквидистантных линий тока с расчетами для двумерной нестационарной задачи конвекции в полости квадратного сечения с боковым подогревом (отсутствует пористая среда) [7] позволяет говорить о качественном совпадении результатов. Отсюда можно сделать вывод, что при Ra Da = 10⁴ и $C = 0.55$ свободноконвективный теплообмен в квадратной полости с боковым подогревом, заполненной насыщенно пористой средой незначительно отличается от процессов происходящих при свободноконвективном течении жид-

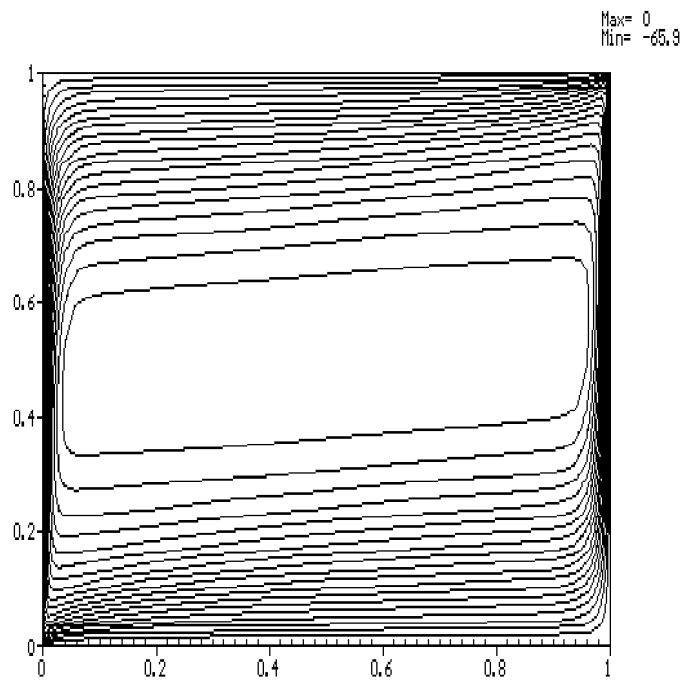
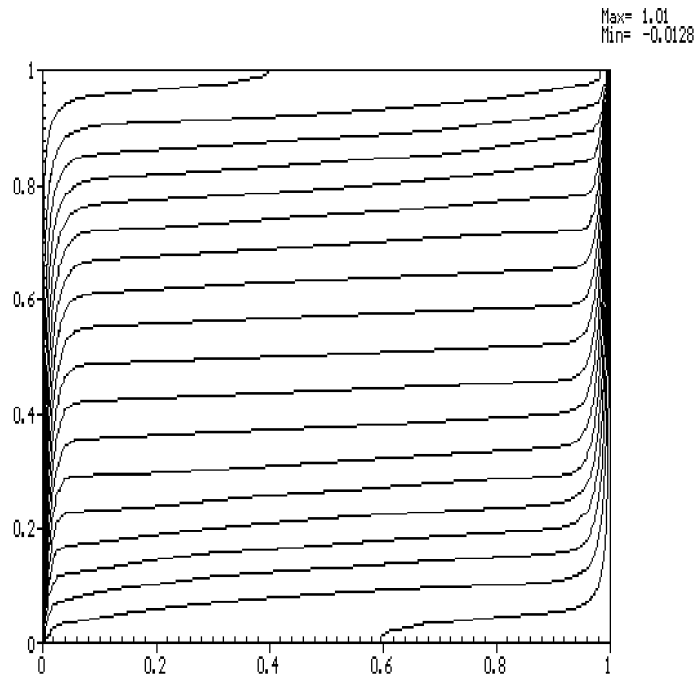


Рис. 4: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^{12}$, $Da = 10^{-8}$, $q = 0.968$.

Табл. 4: $N = 80$, $q = 0.942$

Ra	Da	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu ₀	Nu _{max}	Nu _{min}
10^5	10^{-1}	8.950	9.219	30.57	64.03	4.40	7.941	0.634
10^6	10^{-2}	15.055	15.248	55.18	179.22	8.08	18.237	0.652
10^7	10^{-3}	22.992	23.089	96.99	426.83	13.50	41.746	0.560

кости в отсутствии такой среды. Таким образом, при выбранной комбинации параметров Ra, Pr, Da, C, расширение Бринкмана-Форхгеймера уравнений Дарси не оказывает существенного влияния на процессы теплообмена.

Также проведены расчеты для случая $Ra = 10^6$ и различных значениях числа Дарси $Da = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ (см.таблицу 5). Изотермы и линии тока для этих случаев показаны на рисунках 8,6,9, соответственно. Влияние пористости (числа Дарси) проявляется в уменьшении интенсивности течения и изменении его общей картины.

Табл. 5: $Ra = 10^6$, $N = 80$

Da	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu ₀	Nu _{max}	Nu _{min}
10^{-3}	10.871	10.877	38.79	110.93	6.32	16.782	0.387
10^{-2}	15.055	15.248	55.18	179.22	8.08	18.237	0.652
10^{-1}	16.664	17.011	62.11	210.37	8.70	18.292	0.833
[7]	16.870	17.170	66.93	221.79	8.88	17.996	0.971
[12]	16.320	16.750	64.63	219.36	8.82	17.925	0.989

Влияние нелинейных (инерционных) эффектов на конвекцию жидкости в пористой среде исследовалось во многих работах (см., например, [5]). Здесь мы ограничимся лишь данными расчетов для варианта $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$. Экстремальные характеристики решения для этих случаев представлены в таблице 6.

Табл. 6: $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$, $N = 80$

C	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu ₀	Nu _{max}	Nu _{min}
0.0	16.671	17.044	62.22	215.81	8.78	18.353	0.846
0.55	15.055	15.248	55.18	179.22	8.08	18.237	0.652
2.0	12.930	12.961	45.91	134.74	7.08	17.473	0.496

На рис.10,11 показаны результаты расчетов при $C = 0$ и $C = 2$, соответственно. Как показывают вычислительные эксперименты, с ростом влияния инерционных эффектов (C) наблюдается сглаживание картины течения и снижение интенсивности последнего.

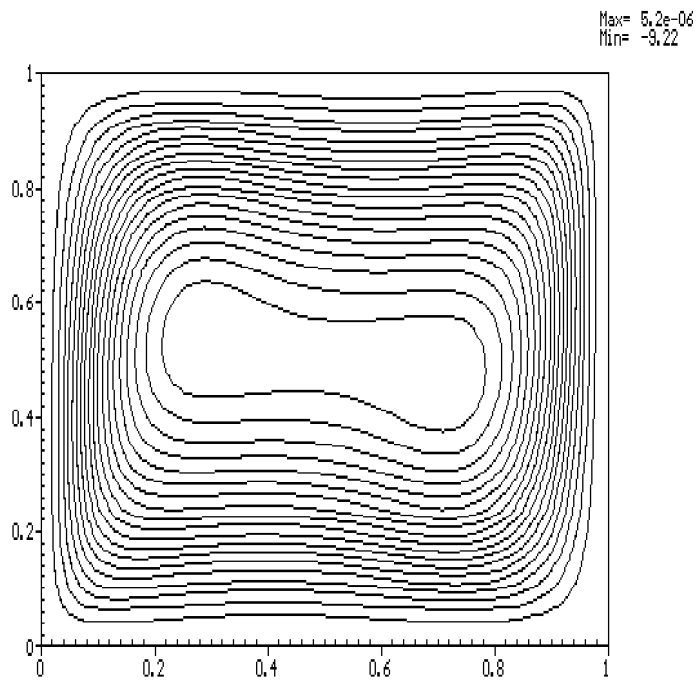
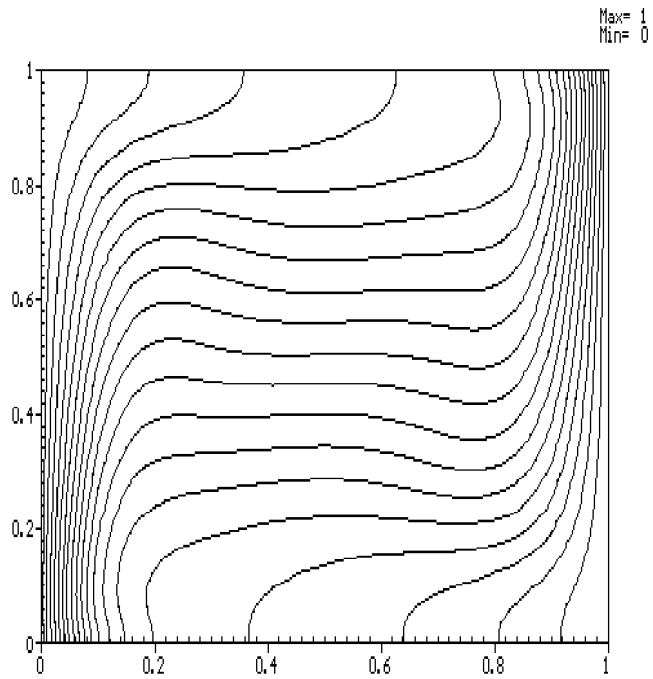


Рис. 5: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^5$, $Da = 10^{-1}$, $q = 0.942$.

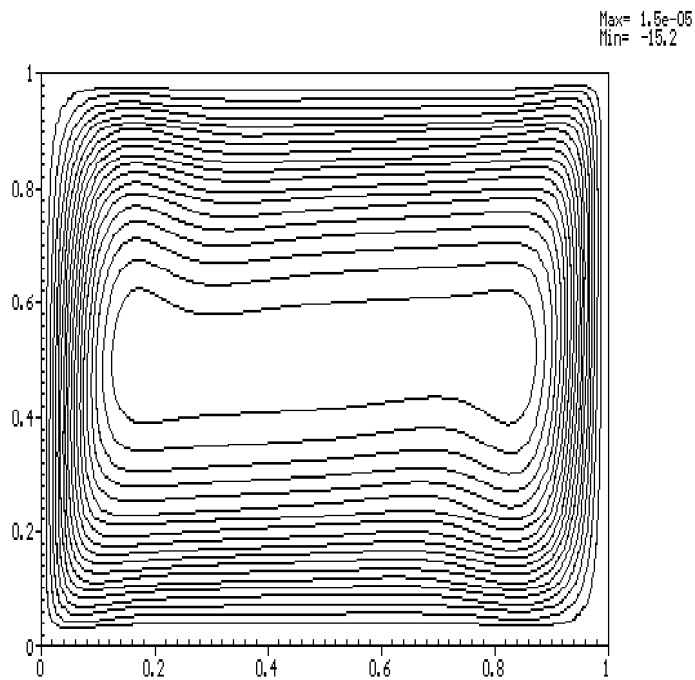
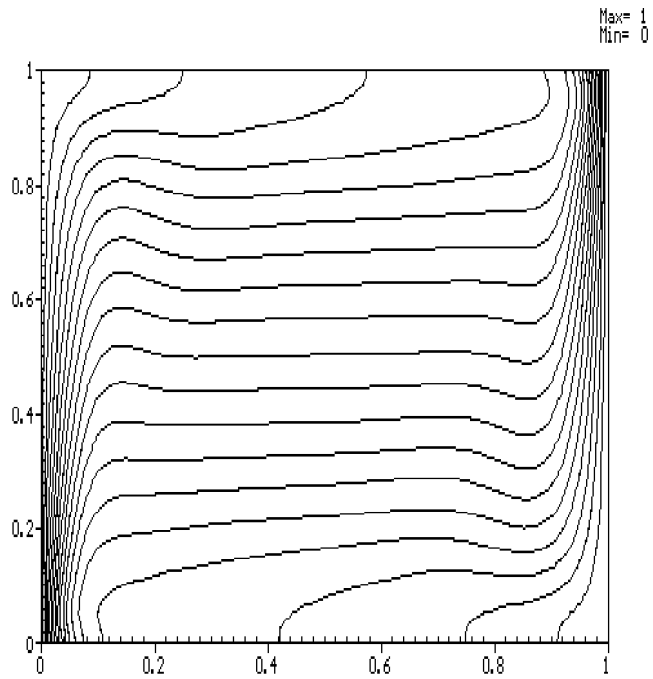


Рис. 6: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$, $q = 0.942$.

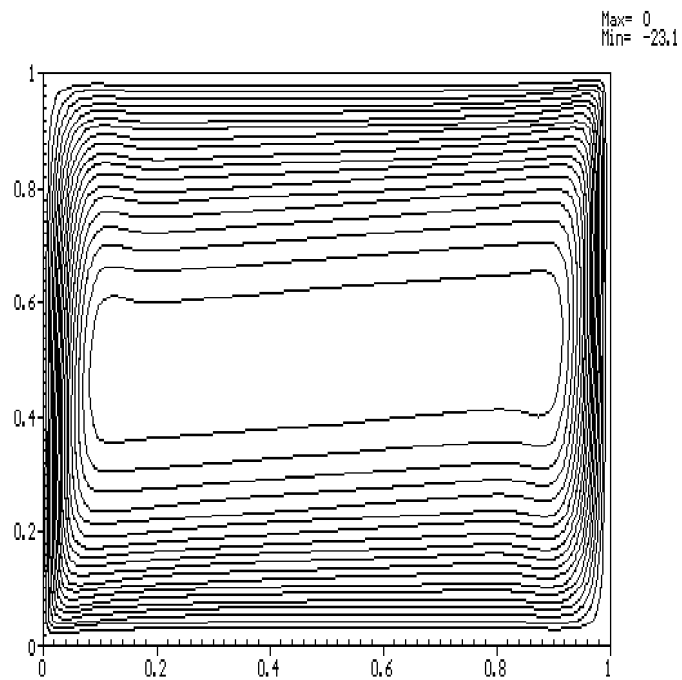
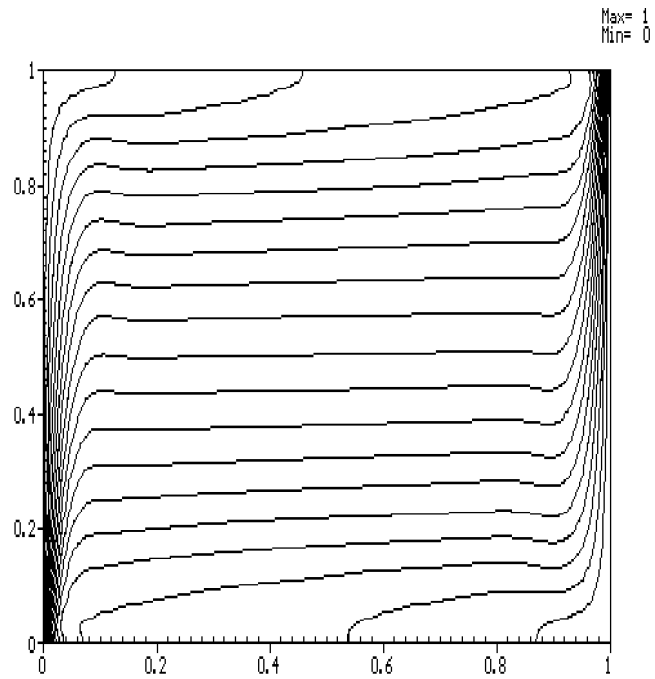


Рис. 7: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$, $Da = 10^{-3}$, $q = 0.942$.

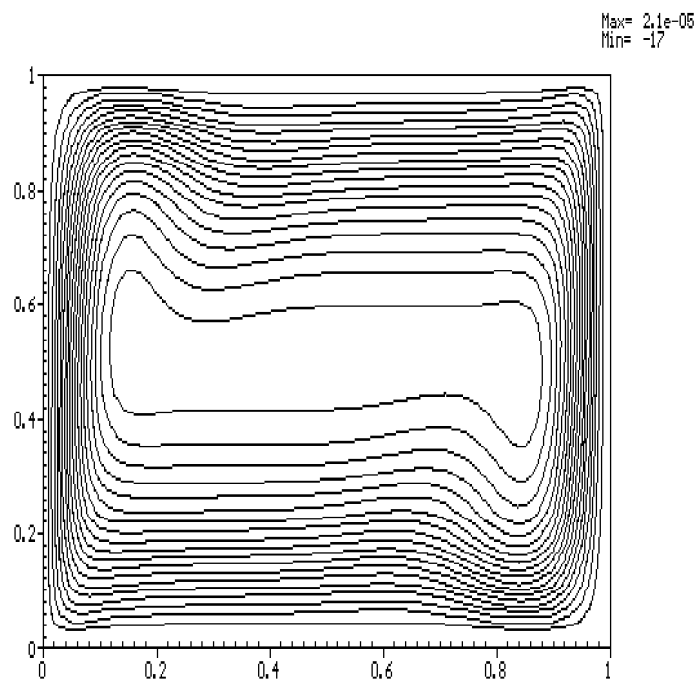
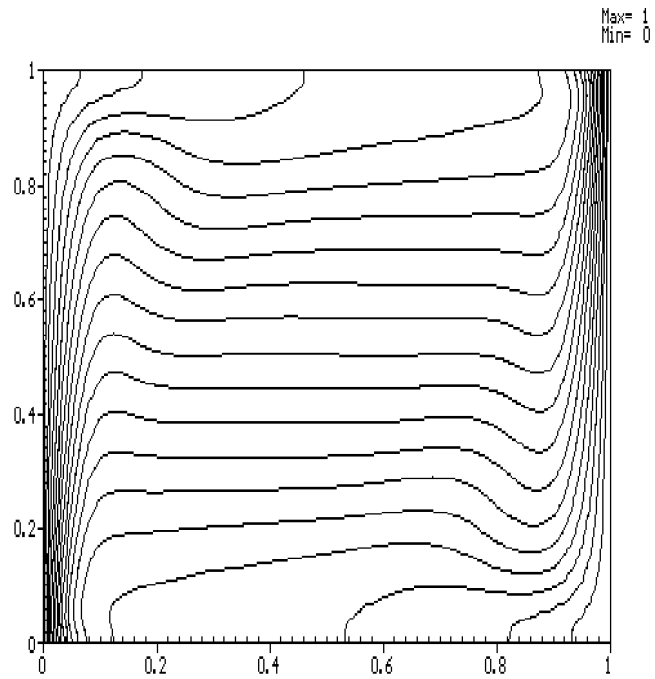


Рис. 8: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-1}$, $q = 0.942$.

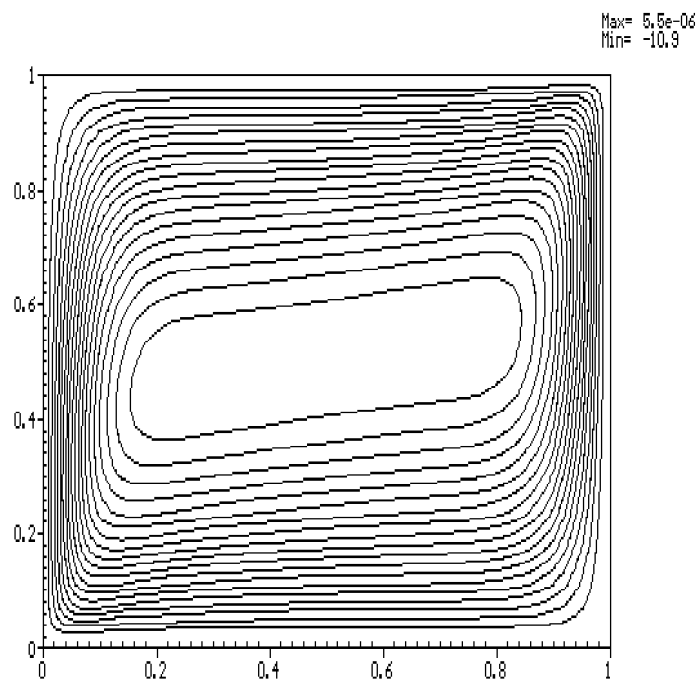
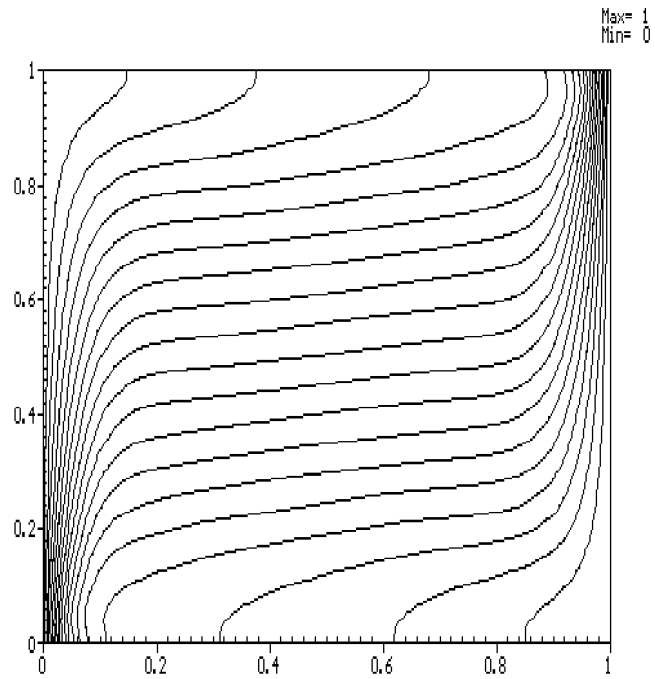


Рис. 9: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-3}$, $q = 0.942$.

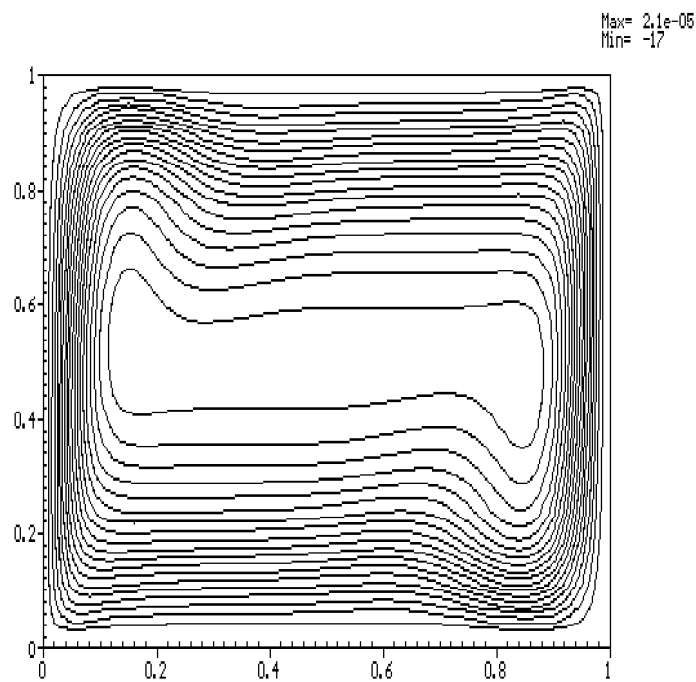
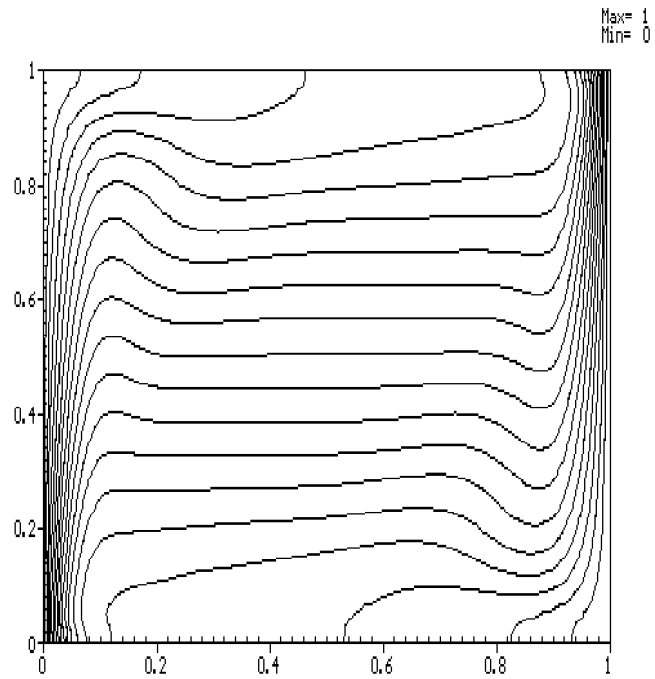


Рис. 10: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$, $q = 0.942$, $C = 0$.

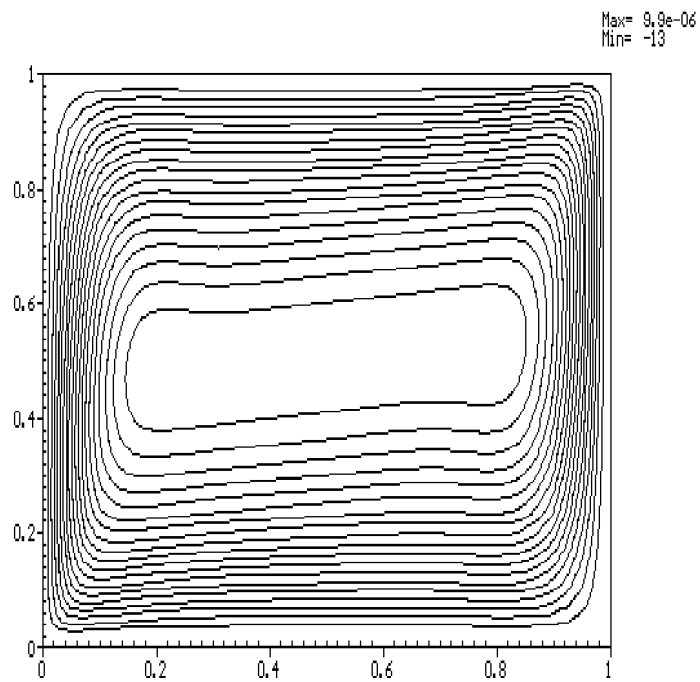
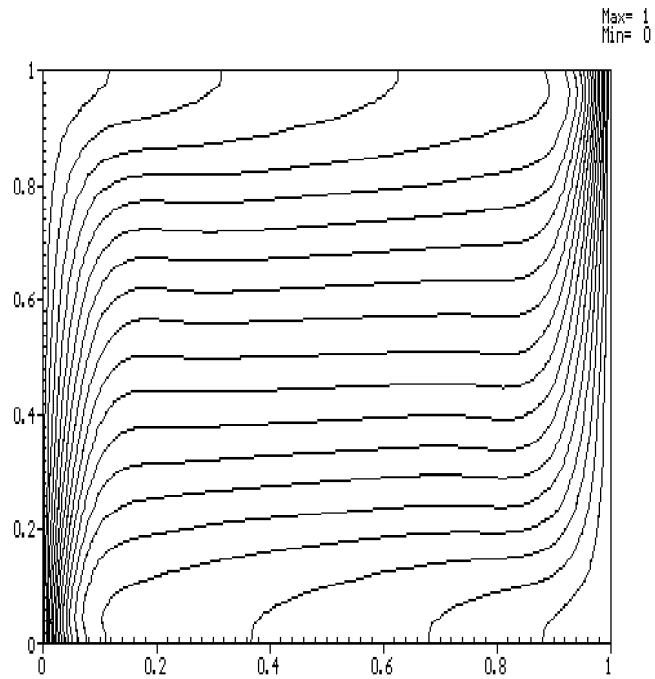


Рис. 11: Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$, $q = 0.942$, $C = 2$.

Литература

- [1] K.L. Walker and G.M. Homsey, Convection in a Porous Cavity, *J. Fluid. Mech.*, vol. 87, pp. 449–474, 1978.
- [2] C.E. Hickox and D.K. Gartling, A Numerical Study of Natural Convection in a Horizontal Porous Layer Subjected to an End-to-End Temperature Difference, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 103, pp. 797–802, 1981.
- [3] G.S. Shiralkar, M. Haajizadeh and C.L. Tien, Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure, *Numer. Heat Transfer*, vol. 6, pp. 223–234, 1983.
- [4] B.K.C Chan, C.M. Ivey and J.M. Barry, Natural Convection in Enclosed Porous Media with Rectangular Boundaries, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 92, pp. 21–27, 1970.
- [5] C. Beckermann, R. Viskanta, and S. Ramadhyani, A Numerical Study of Non-Darcian Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled with a Porous Medium, *J. Numer. Heat Transfer*, vol. 10, pp. 557–570, 1986.
- [6] J.C. Ward, Turbulent Flow in Porous Media, *J. Hydraul. Div. ASCE*, vol. 90, pp. 1–12, 1964.
- [7] Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”, ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
- [8] Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование проблем тепло- и массопереноса с фазовыми превращениями, ИБРАЭ РАН, NSI-04-94, Москва.
- [9] Самарский А.А., Теория разностных схем, Наука, 1989.
- [10] Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений, Наука, 1978.
- [11] Роуч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, 1980.
- [12] G. de Vahl Davis and I.P. Jones, Natural Convection in a Square Cavity — a Comparison Exercise, *Int. J. Num. Methods Fluids*, vol. 3, pp. 227–248, 1983.