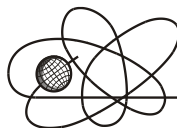




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2001-15

Preprint IBRAE-2001-15

В.М.Головизнин, С.А.Карбасов

**СХЕМЫ КАБАРЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГАЗОДИНАМИКИ В ЭЙЛЕРОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Москва
2001

Moscow
2001

Головизнин В.М., Карабасов С.А. СХЕМЫ КАБАРЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ В ЭЙЛЕРОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. Препринт № IBRAE-2001-15. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2001. 20 с. — Библиогр.: 15 назв.

Аннотация

В настоящей работе предложены несколько компактных разностных схем с пространственно расщепленной временной производной (Кабаре) для одномерных уравнений газодинамики. В отличие от традиционного способа повышения порядка аппроксимации за счет привлечения информации из соседних пространственных ячеек, в данной работе применен подход, не приводящий к расширению пространственного шаблона. Точность аппроксимации повышается за счет использования дополнительных слоев по времени. На основе схемы Роу первого порядка точности как базисной, разработаны компактные схемы, которые консервативны, не приводят к нефизичным осцилляциям и обладают вторым порядком точности в области гладких решений.

В качестве тестовых задач использованы две задачи распада разрыва на равномерной и неравномерной сетке по пространству. Для сравнения рассмотрены несколько классических схем TVD второго порядка точности. В частности, показано, что наиболее удачная из схем Кабаре в данных тестах приводит к заметно лучшему качеству решения, чем распространенный метод экстраполяции переменных MUSCL.

©ИБРАЭ РАН, 2001

Goloviznin V.M., Karabasov S.A. CABARET SCHEMES FOR ONE-DIMENSIONAL GAS DYNAMICS EQUATIONS IN EULERIAN VARIABLES (in Russian). Preprint IBRAE-2001-15. Moscow: Nuclear Safety Institute, November 2001. 20 p. — Refs.: 15 items.

Abstract

In the present paper we develop a few Godunov-type compact upwind difference schemes with a space split time derivative (CABARET) in application to one-dimensional compressible gas flows. As opposed to the conventional approach in improving the order of approximation by incorporating the information from adjacent space cells, we use an approach that does not lead to extending the spatial stencil. Instead the approximation accuracy is improved by using additional time layers. Adopting the first order Roe scheme as the base scheme we construct a few compact schemes which are conservative, not resulting in non-physical oscillations, and second-order accurate in the region of smooth solutions. In numerical experiment there are two shock tube problems with uniform and non-uniform space grid used. For the sake of comparison we consider several classical second-order TVD schemes. In particular, we show that the most successful of CABARET's schemes developed results in a notably better solution quality than the well-known variable extrapolation method MUSCL.

©Nuclear Safety Institute, 2001

Схемы Кабаре для одномерных уравнений газодинамики в эйлеровых переменных

В.М.Головизнин, С.А.Карабасов

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ
113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52
тел.: (095) 958-14-12, факс: (095) 230-20-29, эл. почта: gol@ibrae.ac.ru

Содержание

Содержание	3
1 Введение.....	3
1.1 Цель настоящей работы.....	3
1.2 Одномерные уравнения Эйлера, метод характеристик, схема Роу для решения задачи о распаде произвольного разрыва.....	5
1.3 Типичные схемы TVD, используемые для газовой динамики.....	7
2 Компактные схемы с пространственно расщепленной временной производной.....	9
2.1 Схемы, основанные на трехслойном представлении: Кабаре1 и Кабаре2.....	9
2.2 Схемы, основанные на двухслойном представлении: Кабаре3 и Кабаре4.....	12
2.3 Стартовая процедура и особые точки	13
3 Численные примеры.....	14
4 Заключение	20
5 Благодарности.....	20
6 Литература	20

1 Введение

1.1 Цель настоящей работы

Одной из характерных особенностей при численном решении уравнений газовой динамики является возможность возникновения и распространения разрывных решений. Наличие этой особенности накладывает весьма определенные требования на численный метод, претендующий на возможность использования в широком диапазоне скоростей течения газа. При расчете высокоскоростных течений важной является консервативность, обеспечивающая правильное определение скорости распространения ударных волн и контактных разрывов. С другой стороны, в областях с хорошими свойствами – например, при распространении слабых акустических колебаний - желательно иметь разностный метод с хорошими диссипативными и дисперсионными свойствами, когда амплитудные и фазовые ошибки при переносе гармоник невелики. Следующими практическими требованиями для используемого метода являются отсутствие сильных нефизических осцилляций в решении и достижение как минимум второго порядка точности в областях, где отсутствуют сильные градиенты.

Для иллюстрации рассмотрим уравнение конвекции с постоянной скоростью.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \quad (1.1.1)$$

Как известно, существует теорема Годунова [1], утверждающая, что не существует линейной монотонной, т.е. недопускающей появления новых экстремумов в решении, разностной схемы, аппроксимирующей данное уравнение выше первого порядка точности. Распространенным методом построения схем повышенного порядка точности является создание нелинейных схем, в которых аппроксимация может локально ухудшаться (TVD схемы от ‘Total Variation Diminishing’), или же в которых монотонность выполняется только в некоторой глобальной норме (ENO схемы - от ‘Essentially Non-Oscillatory’).

Кратко остановимся на нескольких традиционных подходах построения TVD схем второго порядка точности (ENO схемы второго порядка также являются TVD, и мы их отдельно здесь рассматривать не будем). Для простоты введем равномерную пространственно-временную сетку с шагами h и τ . Временные слои будем обозначать верхними индексами, а пространственные узлы – нижними индексами.

Классическим способом (Хартен) является введение антидиффузионного разностного члена, повышающего аппроксимацию пространственной части за счет экстраполяции потоков из прилежащих ячеек [2]. При этом способе величина производной, используемой в экстраполяции потоков, подлежит ограничению, чтобы решение оставалось монотонным.

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \left[1 + \frac{\alpha_{i+1/2}}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{u_i^n - u_{i-1}^n} - \frac{\alpha_{i-1/2}}{2} \right] &= 0 \\ \alpha_{i+1/2} &= \alpha \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right); \quad 0 \leq \alpha_{i+1/2} \leq 2 \\ \text{and } \alpha_{i+1/2} &= 0 \text{ if } \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{u_i^n - u_{i-1}^n} < 0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

С другой стороны, вместо потоков из соседних ячеек можно экстраполировать сами переменные, ограничивая их производные и подставляя уточненные значения в выражение для потоков (экстраполяция переменных MUSCL, Ван Лир) [3].

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_{i+1/2}^{n \text{ left}} - u_{i-1/2}^{n \text{ right}}}{h} &= 0 \\ u_{i+1/2}^{n \text{ left}} &= u_i^n + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_i^{\text{left}} \frac{h}{2} \\ u_{i+1/2}^{n \text{ left}} &= u_i^n + \alpha \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right) \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{2} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Фигурирующая в данных формулах α - это нелинейная функция коррекции потоков/переменных, которая обычно задается априори.

В случае линейного переноса эти два подхода приводят к одним и тем же схемам, однако в нелинейном случае, даже при наличии всего лишь одного уравнения, это уже не так. Известно [4], что подход основанный на экстраполяции переменных MUSCL, в большинстве случаев более предпочтителен. Заметим, однако, что оба эти подхода основаны на экстраполяции из соседних пространственных ячеек, что ставит их в определенную зависимость от однородности используемой пространственной сетки.

С другой стороны, порядок аппроксимации может быть улучшен и без привлечения соседних ячеек по пространству – только за счет использования информации с дополнительного временного слоя, что не приводит в расширению пространственного шаблона схемы. Примером такой схемы является линейная схема Кабаре [5,6] (также известная как Upwind Leapfrog Scheme [7]), обладающая отличными диссипативными и дисперсионными свойствами, которая может быть монотонизирована с помощью нелинейной коррекции [8]. В комбинации с нелинейной коррекцией схема Кабаре может быть представлена в двухслойном виде. На первом, консервативном, этапе вычисляются переменные, относящиеся к центрам ячеек

$$\frac{\Psi_{i-1/2}^{n+1/2} - \Psi_{i-1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0, \quad (1.1.4.0)$$

где центральные величины формально определены так, что

$$\Psi_{i-1/2}^{n+1/2} = (\tilde{u}_i^{n+1} + u_{i-1}^n) / 2.$$

Заметим, что если исключить центральные величины из рассмотрения, подставив это определение в (1.1.4.0), то в результате получается трехслойная разностная схема с переменными, определенными только в узлах.

На втором этапе - этапе экстраполяции – вычисленные центральные величины используются для пересчета новых значений узловых величин.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i^{n+1} &= 2\Psi_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1}^n \\ u_i^{n+1} &= \tilde{u}_i^{n+1}\end{aligned}\quad (1.1.4)$$

Линейная разностная схема (1.1.4.0), (1.1.4) – ни что иное как схема Кабаре, подробно исследованная в [5,6].

Для предотвращения нефизических осцилляций (1.1.4) модифицируется, когда новые значения в узлах корректируются, если оказывается, что они лежат вне области монотонности.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i^{n+1} &= 2\Psi_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-1}^n \\ u_i^{n+1} &= \tilde{u}_i^{n+1} \\ \text{if } (\tilde{u}_i^{n+1} > \max(u_i^n, u_{i-1}^n)) & u_i^{n+1} = \max(u_i^n, u_{i-1}^n) \\ \text{if } (\tilde{u}_i^{n+1} < \min(u_i^n, u_{i-1}^n)) & u_i^{n+1} = \min(u_i^n, u_{i-1}^n)\end{aligned}\quad (1.1.4')$$

В [8] было показано, что схема Кабаре с нелинейной коррекцией лучше сохраняет начальное распределение, чем классические схемы TVD второго порядка при тестировании на линейном уравнении переноса. Целью данной работы является ее распространение на одномерную систему уравнений Эйлера.

1.2 Одномерные уравнения Эйлера, метод характеристик, схема Роу для решения задачи о распаде произвольного разрыва

Рассмотрим одномерную систему уравнений газодинамики в эйлеровых переменных. В консервативной форме записи она обычно [9] записывается как

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial x} F(\vec{U}) = 0 \quad (1.2.1)$$

где компоненты вектора консервативных переменных - плотности, импульса и полной энергии и его функция потоков определяются

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}; F(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u \rho H \end{pmatrix}; H = E + \frac{P}{\rho}. \quad (1.2.2)$$

Для замыкания системы обычно используют уравнение состояния $P = (\gamma - 1)(\rho E - \rho u^2/2)$.

Перепишывая (1) в квазилинейной форме получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \mathbf{A}(\vec{U}) \frac{\partial}{\partial x} \vec{U} = 0, \quad (1.2.3)$$

где характеристический Якобиан

$$\mathbf{A}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ u^2(\gamma-1) - \gamma u E & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}. \quad (1.2.4)$$

В данной форме записи уравнения движения ‘сцеплены’ друг с другом, и анализировать свойства системы в таком виде неудобно. Решение обычно представляется в виде линейной комбинации простых

волн, переходя к характеристическим переменным $\frac{\partial}{\partial t} \vec{W} + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \vec{W} = 0$. Переход к характеристическим переменным достигается локальной диагонализацией Якобиана \mathbf{A} с помощью умножения левой и правой части (1.2.3) на матрицу, состоящую из левых характеристических векторов $\mathbf{L} \otimes \mathbf{U} = \mathbf{W}$.

Эта матрица имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2} u^2/c^2 & (\gamma-1)u/c^2 & -(\gamma-1)/c^2 \\ \left(\frac{\gamma-1}{2} u^2 - uc\right)/(\rho c) & (c - (\gamma-1)u)/(\rho c) & (\gamma-1)/(\rho c) \\ -\left(\frac{\gamma-1}{2} u^2 + uc\right)/(\rho c) & (c + (\gamma-1)u)/(\rho c) & -(\gamma-1)/(\rho c) \end{pmatrix}.$$

Чтобы перейти обратно к ‘консервативным’ переменным, необходимо умножить характеристический вектор на матрицу, состоящую из правых собственных векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho/(2c) & -\rho/(2c) \\ u & \rho(u+c)/(2c) & -\rho(u-c)/(2c) \\ \frac{1}{2}u^2 & \rho u(H+uc)/(2c) & -\rho u(H-uc)/(2c) \end{pmatrix},$$

где c - скорость звука.

Сами характеристические переменные выражаются через плотность, скорость и давление ρ, u, p следующим образом:

$$\lambda_1 = \tilde{u}, w_1 = \rho - p/\tilde{c}^2; \lambda_2 = \tilde{u} + \tilde{c}, w_2 = u + p/(\tilde{\rho}\tilde{c}); \lambda_3 = \tilde{u} - \tilde{c}, w_3 = u - p/(\tilde{\rho}\tilde{c}).$$

где тильда обозначает локально фиксированные величины, соответствующие локально фиксированному Якобиану \mathbf{A} .

При дискретизации (1.2.3) нетривиальным моментом является определение дискретного Якобиана

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U}_i + \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{A}}(\vec{U}_{i+1/2}, \vec{U}_{i-1/2}) [\vec{U}_{i+1/2} - \vec{U}_{i-1/2}] = 0.$$

Можно сформулировать три основных критерия, которыми надо руководствоваться при выборе:

1. Консервативность $\tilde{\mathbf{A}}(\vec{U}_{i+1/2}, \vec{U}_{i-1/2}) = \frac{F(\vec{U}_{i+1/2}) - F(\vec{U}_{i-1/2})}{\vec{U}_{i+1/2} - \vec{U}_{i-1/2}}$,

2. Самосогласованность $\tilde{\mathbf{A}}(\vec{U}_{i+1/2}, \vec{U}_{i+1/2}) = \tilde{\mathbf{A}}(\vec{U}_{i+1/2})$,

3. Сохранение свойства гиперболичности - все собственные числа $\tilde{\mathbf{A}}$ должны быть вещественны и различны.

Эти требования являются необходимыми, но не являются достаточными для определения Якобиана единственным образом. Например, разностный Якобиан можно получить, точно решив одномерную задачу распада разрыва, что при подстановке приводит к схеме Годунова [1]. К числу наиболее распространенных методов, основанных на приближенном решении задачи о распаде разрыва, относятся схемы Ошера [10], HLL [11], Маркины [12] и схема Роу [13]. В схеме Ошера/Энkvиста при распаде произвольного разрыва ударная волна заменяется волной сжатия, что приводит к системе уравнений, решаемой точно. В схеме Хартена, Лакса, Ван Лира и Эйфельдта (HLL) ситуация еще более упрощена – рассматриваются только две волны: разрежения и сжатия. Расщепление Маркины основано на идее использовать два Якобиана – в левом и правом узле, чтобы затем сконструировать один - из бегущих направо простых волн левого Якобиана и бегущих налево простых волн правого Якобиана. Наконец, схема Роу основана на задании явных формул для определения линеаризованных величин, входящих в Якобиан.

$$\tilde{\rho} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1}\rho_i}}{\sqrt{\rho_{i+1}} + \sqrt{\rho_i}}; \tilde{u} = \frac{u_{i+1}\sqrt{\rho_{i+1}} + u_i\sqrt{\rho_i}}{\sqrt{\rho_{i+1}} + \sqrt{\rho_i}}; \tilde{H} = \frac{H_{i+1}\sqrt{\rho_{i+1}} + H_i\sqrt{\rho_i}}{\sqrt{\rho_{i+1}} + \sqrt{\rho_i}}. \quad (1.2.5)$$

Существенным недостатком схемы Роу для решения распада разрыва является то, что она допускает существование ударной волны разрежения в звуковых точках, когда $\lambda = u - c \approx 0$ и разностный Якоби-

ан теряет гиперболичность. Данный недостаток эффективно устраняется путем введения небольшой дополнительной вязкости, например (Роу), модифицируя собственные числа в районе звуковых точек

$$|\lambda|_{\text{mod}} = \begin{cases} \tilde{\lambda} & \text{if } |\tilde{\lambda}| \geq \varepsilon; \\ \text{else} & \end{cases}; \quad \varepsilon = \max\{0, (\tilde{\lambda} - \lambda_i), (\lambda_{i+1} - \tilde{\lambda})\} \quad (1.2.6)$$

Используя схему Роу для распада разрыва и интегрируя с первым порядком по времени, приходим к схеме Роу первого порядка для уравнений Эйлера

$$\Delta_i^{n-1/2} \bar{U} + \frac{\tau}{h} \left[\sum_{q^+(i-1/2)} \lambda_q \delta w_q \bar{R}_q + \sum_{q^-(i+1/2)} \lambda_q \delta w_q \bar{R}_q \right] = 0$$

В потоковом виде эта схема может быть представлена как

$$\begin{aligned} \Delta_i^{n-1/2} \bar{U} + \frac{\tau}{h} [\bar{f}^*(i+1/2) - \bar{f}^*(i-1/2)] &= 0; \\ \bar{f}(i+1/2) &= \frac{1}{2}(\bar{f}(i+1) + \bar{f}(i)) - \frac{1}{2} \sum_{q(i+1/2)} |\lambda_q| \delta w_q \bar{R}_q. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Как и схема ‘уголок’ для простейшего уравнения переноса, схема Роу транспортна и не приводит к нефизичным осцилляциям в решении. Основным недостатком ее, как и схемы ‘уголок’, является чрезмерная диссипация. Остановимся на этой схеме как на ‘базовой’.

1.3 Типичные схемы TVD, используемые для газовой динамики

Рассмотрим несколько распространенных схем TVD для задач газодинамики [9].

Для улучшения аппроксимации необходимо использовать информацию из соседних ячеек. Стандартным способом увеличения порядка точности является расширение пространственного сеточного шаблона. Ограничимся только вторым порядком точности – вычислительные шаблоны схем повышенного порядка точности (TVD, ENO [14] и т.д.) быстро увеличиваются по мере увеличения формального порядка аппроксимации, нас же в данной работе интересуют сравнительно компактные схемы.

Используя технику экстраполяции расщепленных потоков для реконструкции каждой компоненты потоков, поток схемы Роу второго порядка точности запишется как:

$$\bar{f}^{Roe(2)}(i+1/2) = \bar{f}^*(i+1/2) + \frac{1}{2} \left[\sum_{q^+(i-1/2)} \Psi^+ \lambda_q \delta w_q \bar{R}_q - \sum_{q^-(i+3/2)} \Psi^- \lambda_q \delta w_q \bar{R}_q \right] = 0 \quad (1.3.1)$$

где лимитерные функции являются функциями градиентов потоков, расщепленных по направлениям

$$\begin{aligned} \Psi^+ &= \Psi(r_q^+), r_q^+ = \frac{(\lambda_q \delta w_q R_q^{\rho,m,E})_{i+3/2}}{(\lambda_q \delta w_q R_q^{\rho,m,E})_{i+1/2}} \\ \Psi^- &= \Psi(r_q^-), r_q^- = \frac{(\lambda_q \delta w_q R_q^{\rho,m,E})_{i-1/2}}{(\lambda_q \delta w_q R_q^{\rho,m,E})_{i+1/2}} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Обычно наращивание порядка аппроксимации по пространству и времени производится независимо. Например, распространенным способом повышения аппроксимации по времени является использование схемы Рунге-Куты третьего порядка точности [14]. С другой стороны, повысить аппроксимацию по времени можно используя методы типа предиктор-корректор, как в схеме Лакса-Вендрофа. Например, поток центральной схемы TVD Лакса-Вендрофа второго порядка аппроксимации и по пространству и по времени может быть записан как

$$\begin{aligned} \vec{f}^{LW}(i+1/2) &= \frac{1}{2}(\vec{f}(i) + \vec{f}(i+1)) - \\ &- \frac{1}{2} \left[\sum_{q(i+1/2)} (\tau^2 \lambda_q^2 (\Psi^+ + \Psi^-) \delta w_q \vec{R}_q - (\Psi^+ + \Psi^- - 1) \lambda_q \delta w_q \vec{R}_q) \right] = 0 \end{aligned}$$

Для схемы Еи - упрощенного варианта схемы Лакса-Ведроффа, поток определяется по формуле

$$\vec{f}^{Yee}(i+1/2) = \frac{1}{2}(\vec{f}(i) + \vec{f}(i+1)) + \frac{1}{2} \left[\sum_{q(i+1/2)} (\Psi^+ + \Psi^- - 1) \lambda_q \delta w_q \vec{R}_q \right] = 0$$

Экстраполяция переменных (MUSCL) и пересчет потоков являются альтернативным способом увеличения порядка аппроксимации. Этот метод обычно приводит к лучшим результатам, чем экстраполяция потоков. Возможно, что в некоторой степени техника MUSCL более надежна потому, что данный метод был предложен как ‘надстройка’, имеющая в основе замечательный метод Годунова. Данный метод может быть представлен состоящим из трех этапов – 1-й экстраполяция решения, 2-й решение задачи распада разрыва, 3-й усреднение полученного решения задачи распада разрыва. Технология MUSCL сохраняет самый важный 2-й ‘физический’ этап нетронутым, уточняя лишь значения на ‘разрывах’, модифицируя этапы 1 и 3.

Применяя идеологию MUSCL к схеме Роу, получаем схему второго порядка точности.

$$\begin{aligned} \vec{f}^{MUSCL(2)}(i+1/2) &= \frac{1}{2}(\vec{f}(\vec{U}_{i+1/2}^{left}) + \vec{f}(\vec{U}_{i+1/2}^{right})) - \frac{1}{2} \sum_{q(i+1/2)} |\lambda_q| \delta \vec{u}_q^{left/right} \\ \vec{u}_q^{left} &= (u_q)_i + \frac{1}{4} \varepsilon \left((1-k) \Psi(r_q^l) + (1+k) r_q^l \Psi\left(\frac{1}{r_q^l}\right) \right) \delta w_q \vec{R}_q \Big|_{i+1/2} \\ \vec{U}_{i+1/2}^{left} &= \sum_{q(i+1/2)} \vec{u}_q^{left} = \vec{U}_i + \frac{1}{4} \varepsilon \sum_{q(i+1/2)} \left[(1-k) \Psi(r_q^l) + (1+k) r_q^l \Psi\left(\frac{1}{r_q^l}\right) \right] \delta w_q \vec{R}_q \\ \vec{u}_q^{right} &= (u_q)_{i+1} - \frac{1}{4} \varepsilon \left[(1-k) \Psi(r_q^r) + (1+k) r_q^r \Psi\left(\frac{1}{r_q^r}\right) \right] \delta w_q \vec{R}_q \Big|_{i+1/2} \\ \vec{U}_{i+1/2}^{right} &= \sum_{q(i+1/2)} \vec{u}_q^{right} = \vec{U}_{i+1} - \frac{1}{4} \varepsilon \sum_{q(i+1/2)} \left[(1-k) \Psi(r_q^r) + (1+k) r_q^r \Psi\left(\frac{1}{r_q^r}\right) \right] \delta w_q \vec{R}_q \end{aligned}$$

где

$$r_q^l = \frac{(R_q^{\rho,m,E} \delta w_q)_{i+1/2}}{(R_q^{\rho,m,E} \delta w_q)_{i-1/2}}, r_q^r = \frac{(R_q^{\rho,m,E} \delta w_q)_{i+1/2}}{(R_q^{\rho,m,E} \delta w_q)_{i+3/2}}$$

В выражениях для экстраполянтов обычно используются следующие коэффициенты: ε - множитель, регулирующий включение/выключение второго порядка точности, k - коэффициент, определяющий направление аппроксимации, например, при $k=-1$ соответствует направленной разности второго порядка, при $k=1$ - центральной, при $k=1/3$ формально обеспечивается третий порядок точности.

Чтобы завершить рассмотрение типичных схем TVD, необходимо выписать наиболее часто используемые лимитерные функции. Для направленных схем используются:

1. Лимитер Ван Лири

$$\Psi = (r + |r|)/(1+r)$$

2. Minmod

$$\Psi = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0 \\ r & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

3. Лимитер ‘Superbee’ Ошера

$$\Psi = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0 \\ 2r & \text{if } 0 \leq r \leq 1/2 \\ 1 & \text{if } 1/2 \leq r \leq 1 \\ r & \text{if } 1 \leq r \leq 2 \\ 2 & \text{else} \end{cases}$$

4. Лимитер, впервые предложенный в [15], здесь мы будем называть MSU.

$$\Psi = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0 \\ 2r & \text{if } 0 \leq r \leq 0.4 \\ \frac{2+r}{3} & \text{if } 0.4 \leq r \leq 4 \\ 2 & \text{else} \end{cases}$$

В случае центрального лимитера распространены три варианта

$$\Psi^+ + \Psi^- = Q(r^-, r^+)$$

$$1. Q(r^-, r^+) = \min \text{mod}(1, r^-) + \min \text{mod}(1, r^+) - 1$$

$$2. Q(r^-, r^+) = \min \text{mod}(1, r^-, r^+)$$

$$3. Q(r^-, r^+) = \min \text{mod}(2, 2r^-, 2r^+, (r^- + r^+)/2)$$

2 Компактные схемы с пространственно расщепленной временной производной

2.1 Схемы, основанные на трехслойном представлении: Кабаре1 и Кабаре2

Основной идеей при построении схем Кабаре является повышение аппроксимации только за счет использования дополнительного временного слоя, делающего пространственно-временной шаблон симметричным. Схема Кабаре для линейного уравнения переноса может быть получена как суперпозиция схемы “уголок” и сопряженной ей схемы, сдвинутой на один узел в направлении ‘против ветра’ и на один временной слой вниз. Можно воспользоваться аналогичным приемом и при построении схемы Кабаре для газодинамики, если вместо ‘уголка’ использовать схему Роу первого порядка. Тогда для каждой компоненты (отвечающей плотности, импульсу и энергии), полученной при локальном расщеплении на характеристические направления $q=1,2,3$, схему Роу можно заменить на сумму – схемы Роу и сопряженной ей схемы, сдвинутой на один узел ‘против потока’ и на один временной слой вниз. Направление ‘потока’ в случае каждой характеристической компоненты будет определяться собственным числом $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Таким образом, для каждой из 9 компонент выписывается такая схема с пространственно расщепленной временной производной.

$$\Delta^n \bar{\Psi}_q + \lambda_q \frac{\tau}{h} \delta_{i-1/2} \bar{u}_q = 0 \quad (2.1.1)$$

где величина в центре ячейки понимается как среднее с соседних временных слоев и узлов, полученное по правилу

$$(\bar{\Psi}_q)_{i-1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} ((\bar{u}_q)_i^{n+1} + (\bar{u}_q)_{i-1}^n) / 2 & \text{if } \lambda_q > 0 \\ ((\bar{u}_q)_{i-1}^{n+1} + (\bar{u}_q)_i^n) / 2 & \text{if } \lambda_q < 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Свойство консервативности разностного Якобиана Роу приводит к тому, что суперпозиция вкладов всех компонент простых волн тождественно равна разности потоков консервативных переменных, таким образом, схема может быть записана в дивергентном виде.

$$\Delta^n \bar{\Psi} = \sum_q \Delta^n \bar{\Psi}_q = -\frac{\tau}{h} \sum_q \lambda_q \delta_{i-1/2} \bar{u}_q = -\frac{\tau}{h} [F(\bar{U}_i^n) - F(\bar{U}_{i-1}^n)]$$

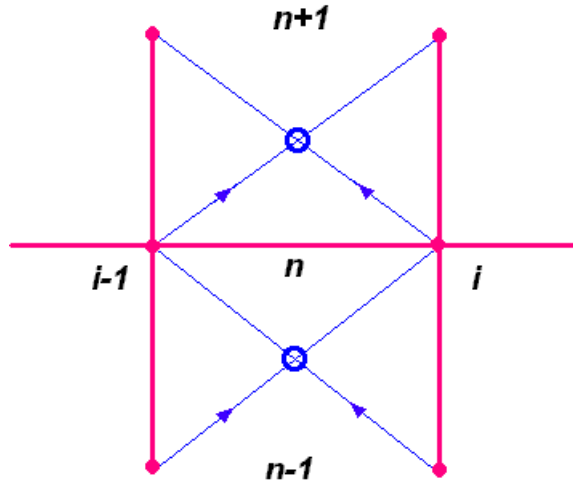


Рис.1 Вычислительный шаблон трехслойной схемы Кабаре

Применяя формулу (2.1.2) для каждой компоненты, алгоритмически можно выделить семь разных случаев зависимости от направления характеристических скоростей на двух соседних временных слоях

$$(1) (\lambda_q)_{i-1/2}^n > 0, (\lambda_q)_{i-1/2}^{n-1} > 0; (2) (\lambda_q)_{i-1/2}^n < 0, (\lambda_q)_{i-1/2}^{n-1} < 0;$$

$$(3) (\lambda_q)_{i-1/2}^n > 0, (\lambda_q)_{i-1/2}^{n-1} < 0; (4) (\lambda_q)_{i-1/2}^n < 0, (\lambda_q)_{i-1/2}^{n-1} > 0$$

$$(5) (\lambda_q)_{i-1/2}^n > 0, (\lambda_q)_{i-1/2}^{n-1} = 0; (6) (\lambda_q)_{i-1/2}^n < 0, (\lambda_q)_{i-1/2}^{n-1} = 0$$

$$(7) (\lambda_q)_{i-1/2}^n = 0$$

В каждом конкретном случае вычисляются приращения в левом и правом узлах по следующим правилам

$$\begin{aligned}
\text{if } \lambda_q > 0 & \begin{cases} (1) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = 2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_{i-1} \\ (3) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = 2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_i, (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = 0; \\ (5) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = \Delta^n \vec{\Psi}_q \end{cases} \\
\text{if } \lambda_q < 0 & \begin{cases} (2) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = 2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_i \\ (4) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = 2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_{i-1}, (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = 0; \\ (6) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = \Delta^n \vec{\Psi}_q \end{cases} \\
(7) & (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = 0, (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = 0.
\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что применение данных формул в чистом виде ведет к неустойчивой схеме. Вероятнее всего, это происходит из-за лавинообразного накопления ошибок вследствие приближенного расщепления на направления “по ветру” и “против ветра”. Схема может быть сделана устойчивой за счет использования алгоритма коррекции, ограничивающего полученные на первом шаге приращения.

$$\begin{aligned}
\text{if } \delta_{i-1/2} u \geq 0, & \quad -\delta_{i-1/2} u \leq (\Delta^{n+1/2} u_q)_i^{left} \leq 0; & \quad 0 \leq (\Delta^{n+1/2} u_q)_i^{right} \leq \delta_{i-1/2} u \\
\text{if } \delta_{i-1/2} u < 0, & \quad 0 \leq (\Delta^{n+1/2} u_q)_i^{left} \leq -\delta_{i-1/2} u; & \quad \delta_{i-1/2} u \leq (\Delta^{n+1/2} u_q)_i^{right} \leq 0
\end{aligned}$$

Назовем такую схему, использующую трехслойное представление схемы Кабаре с нелинейной коррекцией для каждой характеристической компоненты, Кабаре1. Данная схема значительно менее диссипативна, чем схема Роу первого порядка. Однако, несмотря на коррекцию, погрешности расщепления, используя разные временные слои при реконструировании ‘простых волн’, на практике приводят к неудовлетворительным результатам – возникают заметные ошибки при распространении разрывов.

Естественным шагом является попытка улучшения разностных свойств трехслойной схемы, использующейся при реконструкции простых волн. Для этого можно воспользоваться компактным диссипатором ‘Паниковского’ [6], который эффективно улучшал дисперсионные свойства схемы Кабаре в случае линейного конвективного переноса. Данный диссипатор соответствует введению регуляризирующей вязкости в правой части уравнения переноса

$$-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$$

Алгоритмически введение диссипатора ‘Паниковского’ эквивалентно модификации правила для определения средних величин для каждой характеристической компоненты

$$(\vec{\Psi}_q)_{i-1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \left[(1+\varepsilon)(\vec{u}_q)_i^{n+1} + (1-\varepsilon)(\vec{u}_q)_{i-1}^n \right] / 2 & \text{if } \lambda_q > 0 \\ \left[(1+\varepsilon)(\vec{u}_q)_{i-1}^{n+1} + (1-\varepsilon)(\vec{u}_q)_i^n \right] / 2 & \text{if } \lambda_q < 0 \end{cases},$$

где значение $\varepsilon=0$ соответствует схеме Кабаре1, значение $\varepsilon=1$ – схеме Роу первого порядка. Формулы для определения приращения в ячейках переписутся соответственно

$$\begin{aligned}
\text{if } \lambda_q > 0 & \begin{cases} (1) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = (2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (1-\varepsilon)(\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_{i-1}) / (1+\varepsilon), (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = 0 \\ (3) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = (2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (1-\varepsilon)(\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_i) / (1+\varepsilon) \end{cases} \\
\text{if } \lambda_q < 0 & \begin{cases} (2) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = (2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (1-\varepsilon)(\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_i) / (1+\varepsilon), (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_i^{left} = 0. \\ (4) (\Delta^{n+1/2} \vec{u}_q)_{i-1}^{right} = (2\Delta^n \vec{\Psi}_q - (1-\varepsilon)(\Delta^{n-1/2} \vec{u}_q)_{i-1}) / (1+\varepsilon) \end{cases}
\end{aligned}$$

Схему Кабарел с диссипатором назовем Кабаре2.

Без коррекции данная схема устойчива лишь при достаточно больших параметрах диссипации $\varepsilon \sim 0.8$. Наилучший результат достигается при комбинации диссипации с последующей коррекцией найденных приращений. При удачном подборе диссипативного параметра ε в ряде случаев удается получить результаты не худшие, чем с помощью техники MUSCL. Однако величина этого ‘подгоночного’ параметра оказывается сильно зависящей и от числа Куранта, и от конкретной задачи, и улучшить качество решения дальше некоторого порога за счет подбора ε не удается.

2.2 Схемы, основанные на двухслойном представлении: Кабаре3 и Кабаре4

Как было сказано выше, чтобы улучшить порядок аппроксимации, можно уточнять реконструкцию простых волн с привлечением трех временных слоев. Данное улучшение имеет свои пределы, поскольку две задачи распада разрыва с разных временных слоев, вообще говоря, не должны быть связаны друг с другом. Альтернативой этому способу служит использование двухслойной формы записи схемы Кабаре в консервативных переменных. Характеристическое расщепление, необходимое для определения направлений ‘по потоку’ и ‘против’, может быть сделано уже после этого этапа.

На этапе обновления консервативных величин – плотности, импульса и полной энергии - в центрах ячеек имеем

$$\frac{\vec{\Psi}_{i-1/2}^{n+1/2} - \vec{\Psi}_{i-1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{Flux(\vec{U}_i^n) - Flux(\vec{U}_{i-1}^n)}{h} = 0 \quad (2.2.1)$$

Заметим, что данное тождество получено прямым интегрированием (1.2.1) по пространству и времени. Этот шаг автоматически делает схему консервативной. После него в каждой ячейке становится известным полный набор величин: консервативные величины в левом узле, консервативные переменные в правом узле и консервативная величина в центре на промежуточном слое $(n+1/2)$, в которой уже заложен нелинейный характер течения в соответствии с формулой (2.2.1).

На втором этапе – этапе характеристического расщепления – левые, правые и центральные консервативные величины расщепляются на характеристические с помощью матрицы Роу:

$$\begin{aligned}
\vec{w}_{i-1/2}^{n+1/2} &= \mathbf{L}^{Roe} \otimes \vec{\Psi}_{i-1/2}^{n+1/2}; \\
\vec{w}_i^n &= \mathbf{L}^{Roe} \otimes \vec{U}_i^n; \\
\vec{w}_{i-1}^n &= \mathbf{L}^{Roe} \otimes \vec{U}_{i-1}^n.
\end{aligned} \quad (2.2.2)$$

В принципе, использование именно матрицы Роу не обязательно, поскольку консервативность схемы уже гарантирована на первом этапе. Например, вместо (1.2.5) естественно выбрать $\vec{U}_{i-1/2}^{\tilde{}} = (\vec{U}_{i-1}^n + \vec{U}_i^n)$, $\vec{U}_{i-1/2}^{\tilde{}} = \vec{\Psi}_{i-1/2}^{n+1/2}$, также возможно использовать сразу две матрицы – в левой и правой точке (расщепление Маркины), с использованием правых характеристик из левого Якобиана и левых из правого. На практике все же к наилучшим результатам приводит использование Якобиана Роу.

Наличие $\vec{w}_{i-1/2}^{n+1/2}, \vec{w}_i^n, \vec{w}_{i-1}^n$ сразу же позволяет воспользоваться алгоритмом (1.1.4’) для нахождения нового значения для каждой характеристической переменной в каждом узле

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_i^{n+1})^{left} &= 2w_{i-1/2}^{n+1/2} - w_{i-1}^n; (\tilde{w}_{i-1}^{n+1})^{right} = w_{i-1}^n & \text{if } \lambda_{i-1/2} > 0 \\ (\tilde{w}_{i-1}^{n+1})^{right} &= 2w_{i-1/2}^{n+1/2} - w_i^n; (\tilde{w}_i^{n+1})^{left} = w_i^n & \text{if } \lambda_{i-1/2} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{if } (\tilde{w}_i^{n+1} > \max(w_i^n, w_{i-1}^n)) \quad w_i^{n+1} &= \max(w_i^n, w_{i-1}^n) \\ \text{if } (\tilde{w}_i^{n+1} < \min(w_i^n, w_{i-1}^n)) \quad w_i^{n+1} &= \min(w_i^n, w_{i-1}^n) \end{aligned}$$

Приращения характеристических переменных в каждом узле складываются в приращения консервативных переменных слева и справа соответственно. Полные приращения консервативных переменных находятся как сумма вкладов слева и справа

$$\begin{aligned} (d\bar{U}_i^{n+1})^{left} &= \mathbf{R}^{Roe} \otimes (dw_i^{n+1})^{left}; (d\bar{U}_i^{n+1})^{right} = \mathbf{R}^{Roe} \otimes (dw_i^{n+1})^{right}; \\ d\bar{U}_i^{n+1} &= (d\bar{U}_i^{n+1})^{left} + (d\bar{U}_i^{n+1})^{right}. \end{aligned}$$

Получаемую в результате схему назовем Кабаре3. Она является наиболее простой и надежной из всех рассмотренных схем Кабаре. Она полностью лишена ‘подгоночных’ параметров. В то же время Кабаре3 приводит к наилучшим результатам при тестировании. Заметим, что если в (2.2.1) взять величину в центре пространственной ячейки на текущем слое а не на промежуточном

$$\frac{\bar{\Psi}_{i-1/2}^{n+1/2} - 0.5(\bar{U}_i^n + \bar{U}_{i-1}^n)}{0.5\tau} + \frac{Flux(\bar{U}_i^n) - Flux(\bar{U}_{i-1}^n)}{h} = 0 \quad (2.2.1')$$

то результатом будет схема Роу первого порядка. По аналогии с введением ‘диссипатора Паниковско-го’ для трехслойного представления можно ввести диссипатор и для двухслойного, используя комбинацию

$$\frac{\bar{\Psi}_{i-1/2}^{n+1/2} - ((1-\varepsilon)\bar{\Psi}_{i-1/2}^{n-1/2} + \varepsilon 0.5(\bar{U}_i^n + \bar{U}_{i-1}^n))}{(1-0.5\varepsilon)\tau} + \frac{Flux(\bar{U}_i^n) - Flux(\bar{U}_{i-1}^n)}{h} = 0.$$

Однако никаких новых результатов это не приносит – без нелинейной коррекции данная схема удовлетворительно работает только при параметрах диссипации близких к единице.

Тем не менее, возможно ввести диссипацию, как замену процедуры нелинейной коррекции, если модифицировать алгоритм на этапе экстраполяции

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_i^{n+1})^{left} &= \varepsilon w_{i-1/2}^{n+1/2} + (1-\varepsilon)(2w_{i-1/2}^{n+1/2} - w_{i-1}^n); (\tilde{w}_{i-1}^{n+1})^{right} = w_{i-1}^n & \text{if } \lambda_{i-1/2} > 0; \\ (\tilde{w}_{i-1}^{n+1})^{right} &= \varepsilon w_{i-1/2}^{n+1/2} + (1-\varepsilon)(2w_{i-1/2}^{n+1/2} - w_i^n); (\tilde{w}_i^{n+1})^{left} = w_i^n & \text{if } \lambda_{i-1/2} < 0. \end{aligned}$$

Интересно, что при таком введении диссипации случай $\varepsilon=1$ уже не соответствует схеме Роу хотя при тестировании и приводит к сходным результатам.

Данную схему, состоящую из консервативного этапа и этапа проекции, будем называть Кабаре4. В отличие от схемы Кабаре2, схема Кабаре4 даже при достаточно малых $\varepsilon \sim 0.1$ не приводит к появлению неустойчивости, и этап коррекции в ней не является необходимым. При слишком малых параметрах диссипации в Кабаре4 возникают нефизичные осцилляции около разрывов, при больших – решение становится сглаженным. Хотя подобрать такой параметр, чтобы получить качество решений сравнимое с Кабаре3, не удастся, привлекательной чертой этой схемы остается то, что ее единственная нелинейность заключается в характеристическом расщеплении - ни нелинейной коррекции, ни лимитеров она не использует.

2.3 Стартовая процедура и особые точки

По аналогии со случаем уравнения линейного конвективного переноса, когда на первом шаге используется схема ‘уголок’, в случае одномерных уравнений Эйлера можно использовать схему Роу первого порядка. Как уже упоминалось, недостатком схемы Роу является возникновение ‘ударных волн разрежения’ в звуковых точках, т.е. там где скорость газа равна скорости звука. Это связано с локальным нару-

шением энтропийного неравенства для схемы Роу, когда система уравнений теряет гиперболичность. Для схем Кабаре, основанных на расщеплении Роу, эта особенность также имеет место. Простой и эффективный способ исправления этого недостатка состоит в следующем. В окрестности звуковых точек, где порядок аппроксимации уже не так важен, приращения в узлах на этапе экстраполяции можно находить по формуле направленных разностей первого порядка, где характеристическая скорость заменяется по формуле (1.2.6). Например, в случае $\lambda_{1-1/2} > 0$ можно положить

$$(dw_i^{n+1})^{left} = -\lambda_{mod}(w_i^n - w_{i-1}^n)\tau/h; (dw_{i-1}^{n+1})^{right} = 0 \quad (2.3.1)$$

3 Численные примеры

Стандартным тестом для одномерных разностных схем для газовой динамики является задача о распаде разрыва. В начальный момент задаются значения, характеризующие состояние газа до и после разрыва. В общем случае решение распадается на автомодельную комбинацию волны разрежения, контактного разрыва и ударной волны. Данный тест характерен тем, что в нем проявляются свойства численного метода при расчете сразу нескольких типов течений (волн). Например, неконсервативность метода проявляется в ошибках при моделировании ударных волн и контактных разрывов. Недостаток ‘энтропийности’ или вязкости проявляется в нефизических осцилляциях. Низкий порядок аппроксимации и численная диссипация – в ‘сглаживании’ градиентов в решении. Как известно, наиболее чувствительны к ‘сглаживанию’ линейные области, где нелинейные механизмы самовосстанавливания разрывов не работают – прежде всего это относится к области контактного разрыва. Наконец, несмотря на то, что волна разрежения сама по себе особых трудностей при расчете обычно не вызывает, окрестности сопряжения волны разрежения с соседними областями решений обычно весьма трудно уловимы.

В данной работе для задачи о распаде разрыва использованы следующие два набора левых и правых векторов задачи Римана (так называемые задачи Сода [9]):

1. ‘Дозвуковой’ случай– решением является комбинация из ударной волны, контактного разрыва и волны разрежения, где максимальная скорость газа меньше скорости звука.

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix}^{left} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.E + 5 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix}^{right} = \begin{Bmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 1.E + 4 \end{Bmatrix}$$

2. ‘Сверхзвуковой’ случай– решением является комбинация из ударной волны, контактного разрыва и волны разрежения, где максимальная скорость газа больше скорости звука.

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix}^{left} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.E + 5 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix}^{right} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 1.E + 3 \end{Bmatrix}$$

В начале на задачах 1 и 2 были протестированы следующие классические TVD схемы второго порядка, основанные на характеристическом расщеплении:

- Экстраполяция потоков: схема Роу второго порядка (с четырьмя типами лимитеров), схема Лакса-Вендроффа, версия Еи схемы Лакса-Вендроффа (с тремя типами симметричных лимитеров);
- Экстраполяция переменных: схема Роу второго порядка с MUSCL (с четырьмя типами лимитеров).

Затем задачи 1 и 2 были решены с помощью новых схем с пространственно расщепленной временной производной: Кабаре 1, Кабаре2, Кабаре3 и Кабаре4. Использовалась достаточно грубая, однородная по пространству, расчетная сетка с количеством узлов $N=100$. В отношении классических TVD схем основные результаты тестов совпадают с [9]. Так, направленные схемы в основном предпочтительнее, с точки зрения получаемого качества решения, чем центральные. На Рис.2 для сравнения показаны профили плотности и скорости, соответствующие задаче1, полученные по схемам Лакса-Вендроффа и Роу MUSCL.

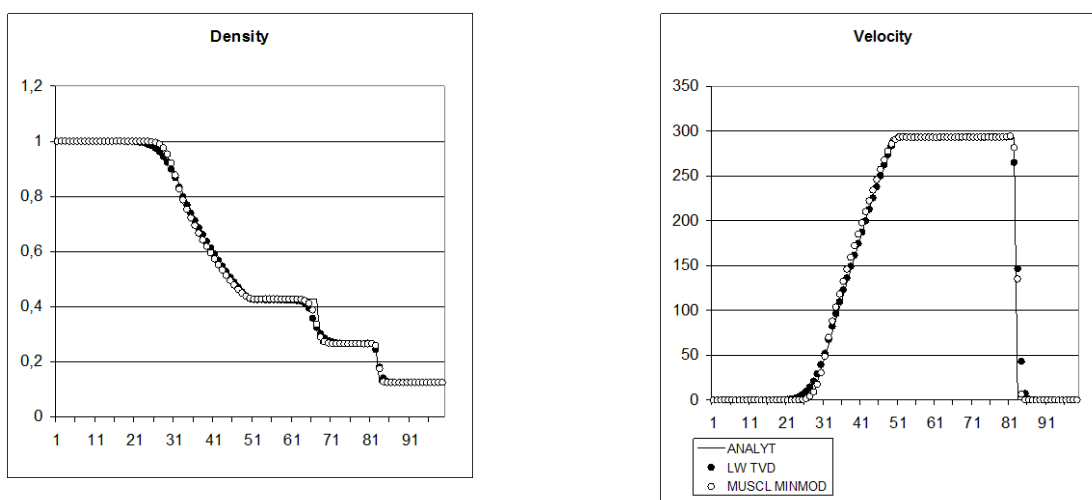


Рис.2 Сравнение схемы Лакса-Вендроффа с симметричным лимитером и схемы Рои MUSCL с лимитером MinMod при решении задачи 1

Сравнение методов экстраполяции переменных и потоков проводилось в приложении к схеме Рои. Использование технологии MUSCL в схеме Рои в большинстве случаев приводит к несколько более 'гладким' результатам в области волны разряжения и чуть менее 'размытым' разрывам. Впрочем, кардинального улучшения качества решения относительно техники расщепления потоков использование MUSCL отмечено не было.

Из лимитеров наилучшее качество решения при достаточно малых числах Куранта обеспечивают Superbee и MSU. Они являются наиболее 'сжимающими' и обеспечивают наименее 'размазанные' профили ударных волн и контактных разрывов.

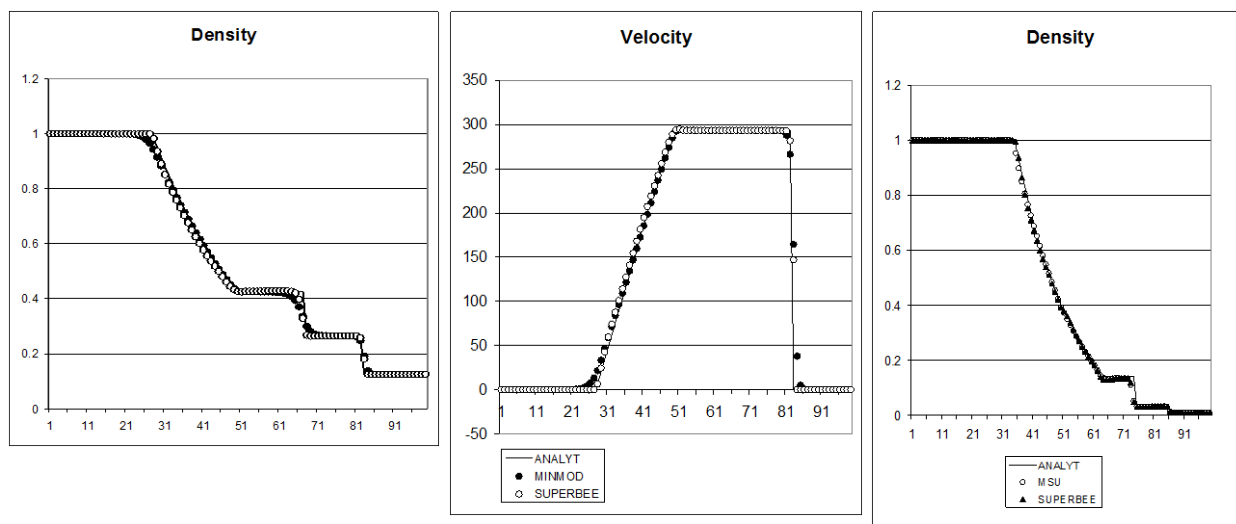


Рис.3 Сравнение схемы Рои MUSCL с различными типами лимитеров: MinMod, Superbee (задача1) и Superbee, MSU (задача2).

Однако для оптимальной работы и Superbee и MSU нуждаются в точно подобранном числе Куранта – по сравнению с MinMod они дают заметный выигрыш в некотором, достаточно малом диапазоне чисел Куранта $CFL \sim 0.2-0.3$. Поэтому с точки зрения совокупности требований - качества и надежности работы

в относительно широком диапазоне чисел Куранта $CFL_{max} \sim 0.9$ лимитер Minmod представляется предпочтительнее.

На следующем Рис.4 Представлены решения задачи1 с помощью схемам Кабаре2 и MUSCL с лимитером MinMod.

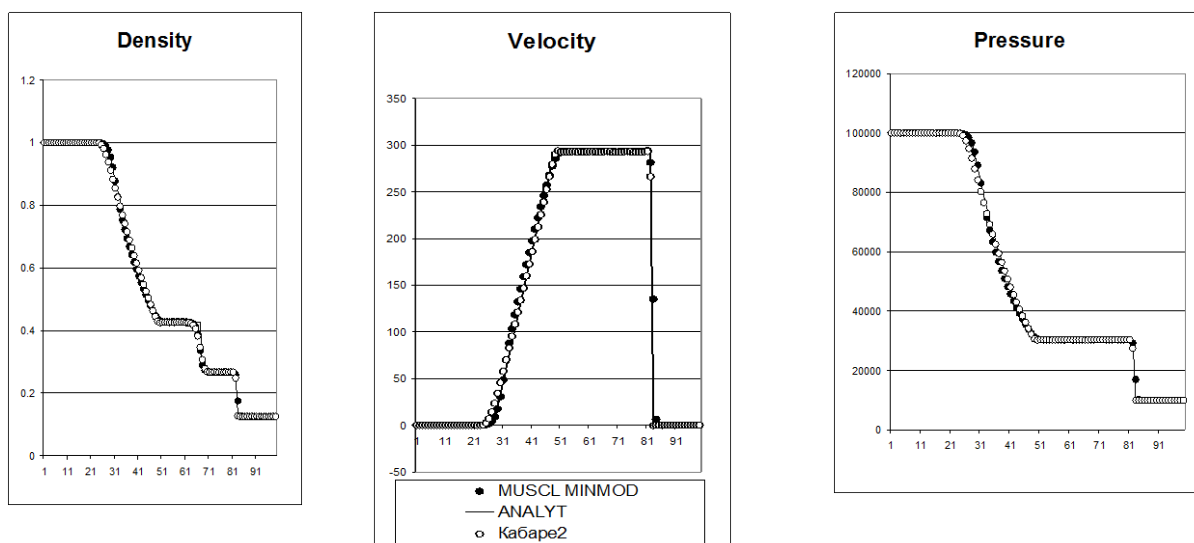


Рис.4 Сравнение схемы Кабаре2 и MUSCL с лимитером MinMod (задача1).

С помощью подбора параметра диссипации ($\epsilon=0.3$) в Кабаре2 в этой задаче удается получить качество решения практически не уступающее технике MUSCL. Так, ударная волна при расчете по Кабаре2 разрешена лучше. С другой стороны, MUSCL оказывается более точен при расчете волны разрежения. При решении задачи2 также удачно подобрать параметр диссипации в Кабаре 2 не удается.

На Рис.5 демонстрируются решения задачи1, полученные схемами Кабаре в двухслойном представлении – Кабаре3 и Кабаре4. В схеме Кабаре3 нефизичные осцилляции подавлены на этапе нелинейной коррекции характеристических величин. В схеме Кабаре4 для этой цели использована искусственная вязкость с величиной $\epsilon=0.45$, подобранной, чтобы обеспечить разумный баланс между осцилляциями и диссипативностью.

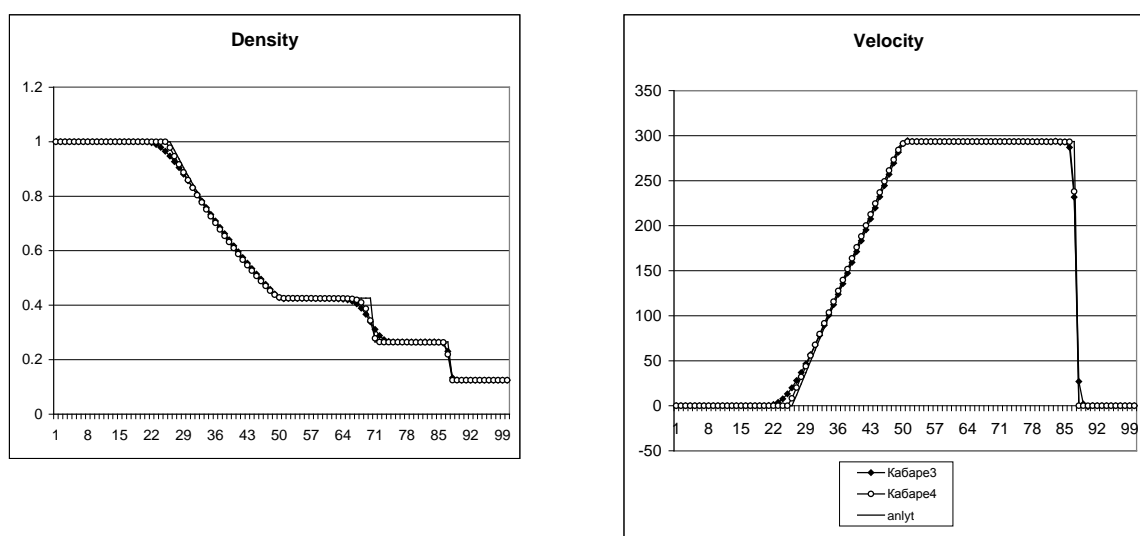


Рис.5 Сравнение схем Кабаре3 и Кабаре4 в задаче1

Видно, что в данном случае ‘полностью’ нелинейная (нелинейная и по расщеплению, и по способу регуляризации) схема - Кабаре3 - приводит к лучшим результатам.

На Рис.6 приведены решения задачи1 схемами Кабаре3 и MUSCL MinMod при числе Куранта CFL=0.9.

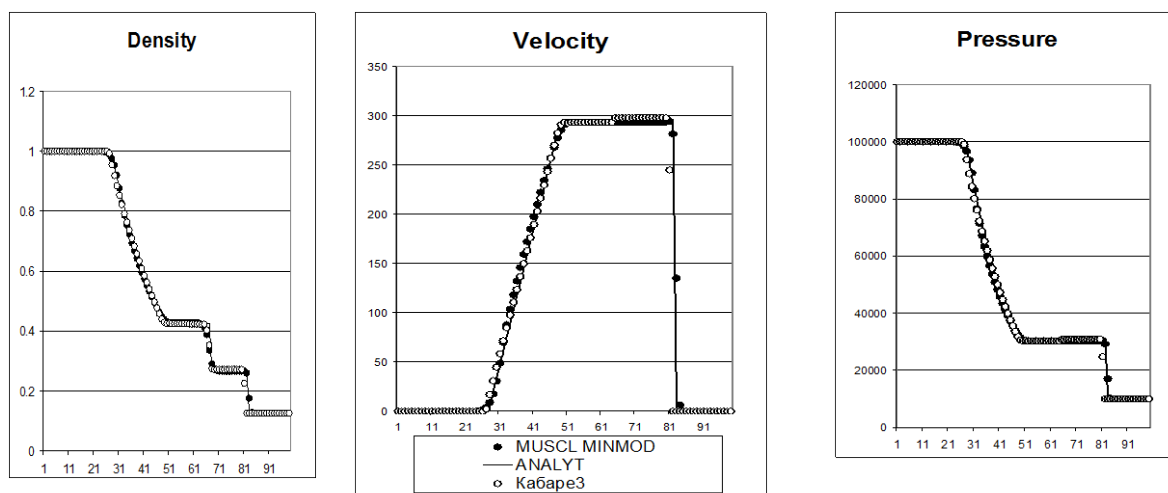


Рис.6 Профили плотности, скорости и давления, полученные при решении задачи1 по схемам Кабаре3 и MUSCL с лимитером MinMod

Из графиков видно, что Кабаре3 приводит как к более резким профилям контактного разрыва и ударной волны, так и к более точно схваченным ‘углам’ волны разряжения. Преимущества Кабаре3 в точности перед MUSCL с MinMod также видны из графиков сравнительных распределений ошибок, представленных на Рис. 7.

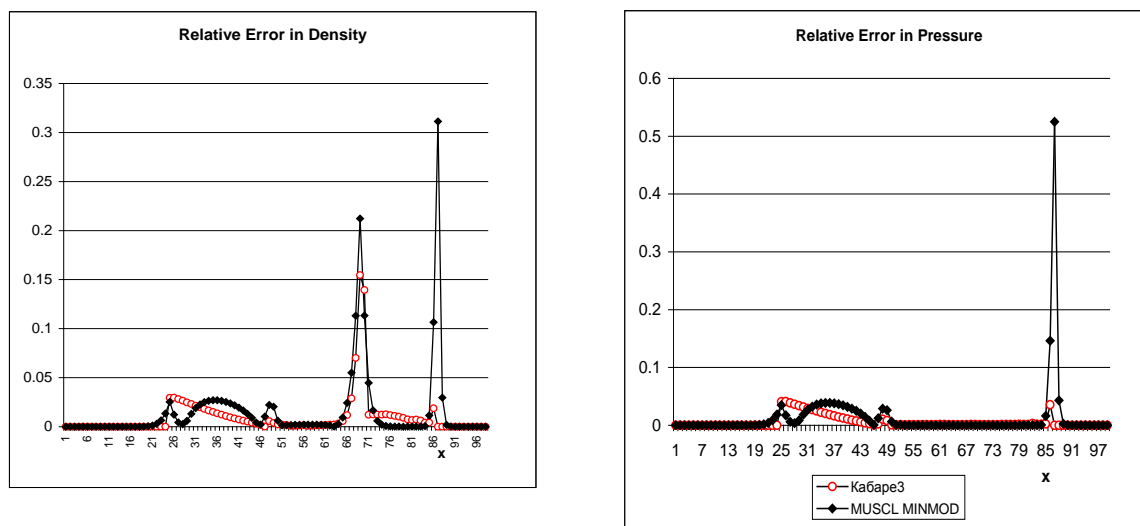


Рис.7 Относительные ошибки в плотности и давлении схем Кабаре3 и MUSCL с лимитером MinMod при решении задачи1

Небольшая переоценка скорости Кабаре3 на графиках – вследствие того, что число Куранта CFL~0.9, оптимальное для MinMod оказалось несколько завышенным для Кабаре3. Однако по сравнению с MUSCL с лимитерами Superbee и MSU схема Кабаре3 надежно работает практически в том же диапазоне чисел Куранта, что и MUSCL с лимитером MinMod.

На Рис.8 продемонстрированы решения задачи2 с помощью Кабаре3 и MUSCL MinMod. Число Куранта в этом случае CFL=0.8.

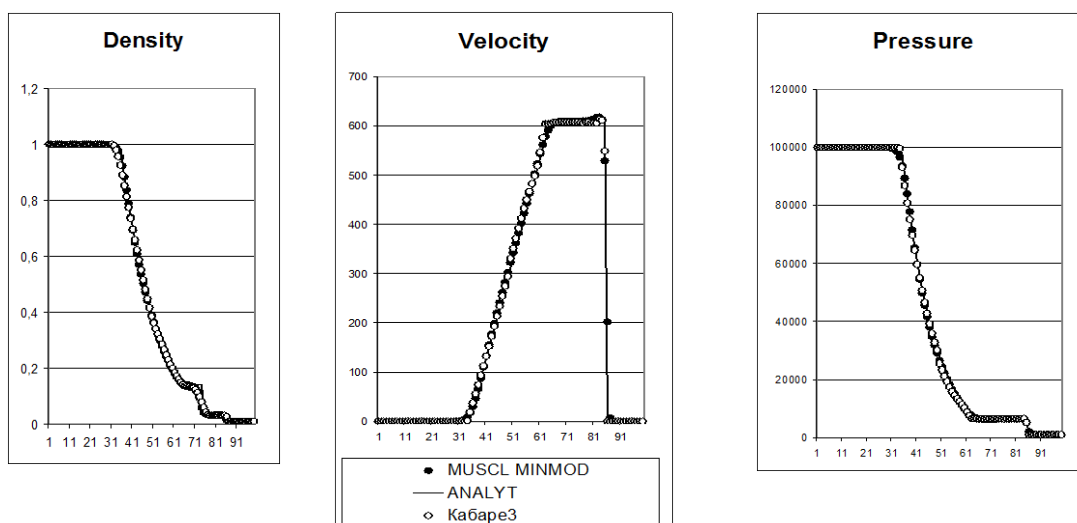


Рис.8 Профили плотности, скорости и давления, полученные при решении задачи2 по схемам Кабаре3 и MUSCL с лимитером MinMod

Соответствующие распределения ошибок представлены на Рис.9, из которых видно, что и в случае сверхзвуковых течений Кабаре3 приносит заметно меньше ошибок в ударной волне и контактном разрыве.

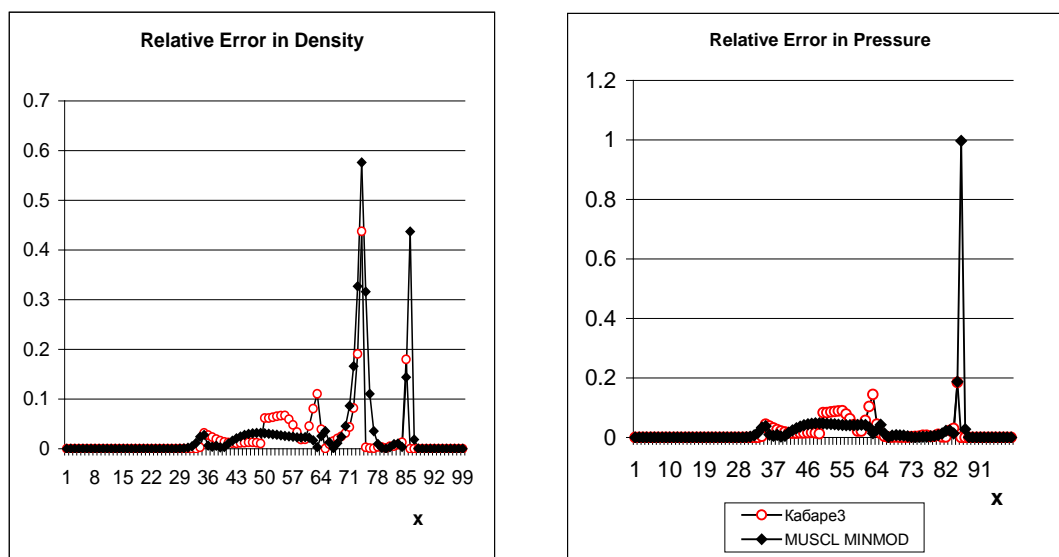


Рис.9 Относительные ошибки в плотности и давлении схем Кабаре3 и MUSCL с лимитером MinMod при решении задачи2

В тоже время, расчет волны разрежения по Кабаре3 происходит несколько менее точно. Вероятнее всего, это связано с упрощенным рассмотрением случая особых точек в алгоритме (2.3.1).

На практике, большинство используемых расчетных сеток неоднородно по пространству. Поэтому интересно проследить, насколько разностные решения чувствительны к однородности сетки. Можно

ожидать, что схема Кабаре3, будучи компактнее, чем MUSCL, должна быть менее чувствительна к степени однородности сетки. В качестве примера при решении задачи1 будем использовать пространственную сетку с тем же числом ячеек $N=100$, в которой шаг по пространству периодически изменяется с периодом 5 ячеек, и где минимальная и максимальная ширина ячейки отличаются в 20 раз $h_{max}/h_{min}=20$.

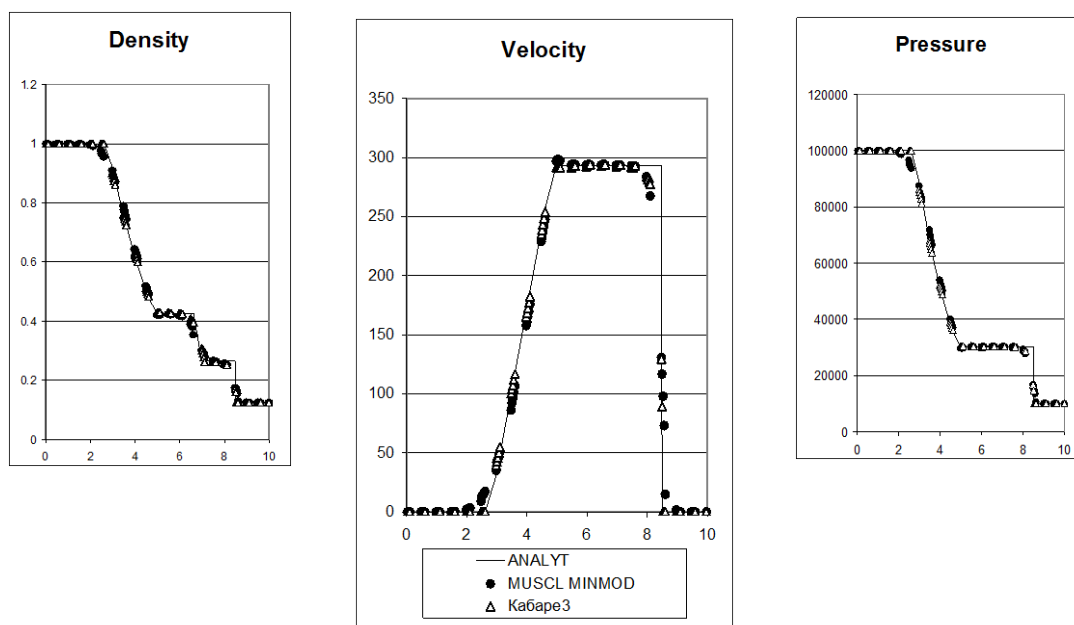


Рис.10 Сравнение Кабаре3 и MUSCL с лимитером MinMod на неоднородной сетке с $h_{max}/h_{min}=20$ при решении задачи1. На оси абсцисс – пространственная координата.

Как видно из графиков (Рис.10), схема Кабаре3 позволяет получать заметно более точное решение, чем MUSCL с лимитером MinMod. Соответствующие распределения ошибок приведены на Рис.11. Из данных распределений следует, что ошибки при решении задачи1 схемой Кабаре3 мажорируются ошибками MUSCL MinMod практически на всей области решения.

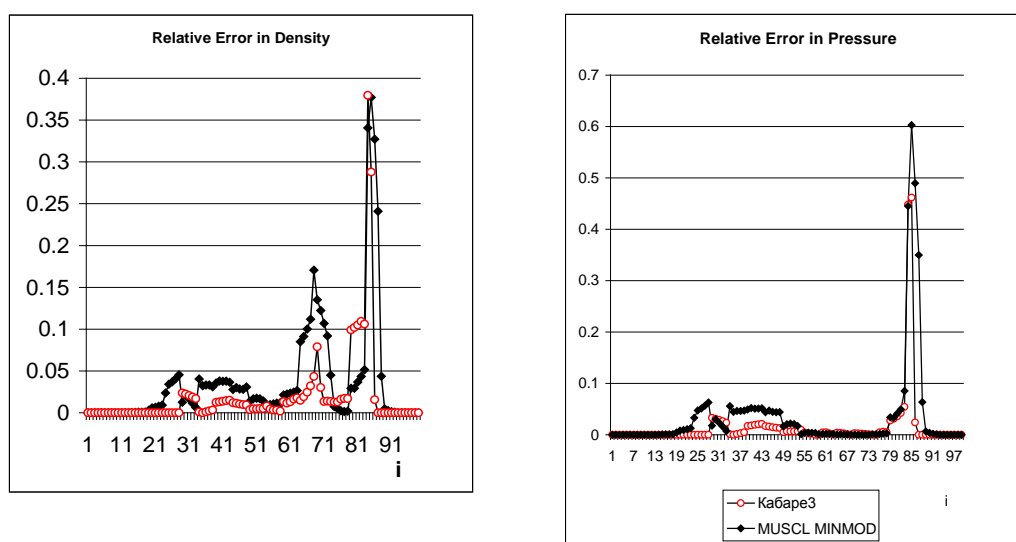


Рис.11 Относительные ошибки при решении задачи1 на неоднородной сетке с $h_{max}/h_{min}=20$ с помощью Кабаре3 и MUSCL с лимитером MinMod. По оси абсцисс отложены порядковые номера ячеек.

4 Заключение

В работе на основе схемы Роу первого порядка получены 4 новых схемы с пространственно расщепленной временной производной с компактным пространственным шаблоном для решения одномерных уравнений газодинамики. Две из них, основанные на двухслойном представлении схемы Кабаре, признаны наиболее перспективными для дальнейшего использования.

По результатам тестов на задаче распада разрыва из нескольких классических схем TVD второго порядка выбрана схема Роу MUSCL с лимитером MinMod, как наилучшая в данном классе задач.

Показано, что наиболее удачная из нелинейных схем, Кабаре3, при решении тестовых задач распада разрыва приводит к меньшим ошибкам, чем технология MUSCL с лимитером MinMod. Особенно заметны преимущества компактности схемы Кабаре3 на сильно неоднородных пространственных сетках.

Требуется дальнейшие исследования как по совершенствованию алгоритма в случаях распространения сильных ударных волн, так и по разработке новых, еще менее диссипативных модификаций алгоритма для моделирования контактных разрывов и ударных волн.

5 Благодарности

Авторы выражают глубокую признательность проф. В.Ф. Тишкину за плодотворные дискуссии во многом послужившие отправной точкой для настоящей работы.

Данная работа была финансирована грантом EPSRC EJA/U48, грантом РФФИ N 990101059 и поддержана в рамках 6-го конкурса-экспертизы конкурса проектов молодых ученых РАН: гранты 82, 395.

6 Литература

1. С.К. Годунов. Разностные методы численного расчета разрывных решений гидромеханики, *Мат. Сб.* 47(89), (1959), 271-306.
2. A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* 1983. V.49. pp.357-393.
3. B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Comp. Phys.*, 1974, 14, pp. 361-70.
4. W.K. Anderson, J.L. Thomas, B. Van Leer, Comparison of finite volume Flux vector splittings for the Euler equations, (1986) *AIAA Journ*, 24, 1453-60.
5. В.М. Головизнин, А.А. Самарский. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной. *Журн. Мат. Моделирования.* 1998. т.10. №1. с.86-100.
6. В.М. Головизнин, А.А. Самарский. Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре». *Журн. Мат. Моделирования*, т. 10 (1998), №1, с. 101-116.
7. A. Iserles. Generalised leapfrog methods, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 6, 1986.
8. В.М. Головизнин, С.А. Карабасов. Нелинейная коррекция схемы «Кабаре». *Журн. Мат. Моделирования*, №12 (1998), стр.107-123.
9. C. Hirsh, Numerical computation of internal and external flows, V2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, 1990 *John Wiley & Sons Ltd.*
10. S. Osher. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation. *SIAM J.Numer.Anal.*,(1984), V.21, N2, pp.217-235.
11. R. Donat, A. Marquina. Capturing Shock Reflections: An improved Flux Formula, *Journ. Of Comp. Phys.*, V.25,(1996), pp 42-58.
12. B. Einfeldt. On Godunov-type methods for gas dynamics, *SIAM J. Numer. Anal.* 25, (1988), pp. 294-318.
13. P.L. Roe. Characteristic based schemes for the Euler equations. *Annual. Rev. Fluid. Mech.* (1986), V.18, pp.337-365.
14. R.P. Fedkiw, B. Merriman, R. Donat, and S. Osher, The Penultimate Scheme for Systems of Conservation Laws: Finite Difference ENO with Marquina's Flux Splitting, *Report*, July 1996.
15. К.В. Вязников, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский, М.Ю. Шашков, Квазимонотонные разностные схемы повышенного порядка точности. *Препринт ИПМ АН СССР им. М.В.Келдыша*, (1987), N36.