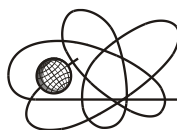




*Российская Академия Наук*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ  
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



**ИБРАЭ**

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY  
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИВРАЕ-1997-15

Preprint IBRAE-1997-15

**С.А.Карабасов**

**ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ «КАБАРЕ»  
В ЗАДАЧАХ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ  
НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ**

Москва 1997

Moscow 1997

Карабасов С.А. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ «КАБАРЕ» В ЗАДАЧАХ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ. Препринт № ИВРАЕ-97-15. Москва. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. 1997. 11 с. — Библиогр.: 5 назв.

Аннотация

Рассмотрено применение новой явной трехслойной схемы «Кабаре» с пространственным расщеплением временной производной к двум нелинейным задачам двухфазной фильтрации. На примере решенных задач показано, что замечательные транспортные свойства шаблона «Кабаре» относительно классических линейных схем находят особое применение в нелинейных задачах, когда нужна высокая точность вычислений.

©ИВРАЭ РАН, 1997

Karabasov S.A. THE APPLICATION OF “CABARET” FINITE DIFFERENCE SCHEME TO TWO-PHASE FILTRATION PROBLEMS OF NOT-MINGLED FLUIDS. Preprint IBRAE-97-15. Moscow. Nuclear Safety Institute. August 1997. 11 p. — Refs.: 5 items.

Abstract

An application of the new direct three-layers “Cabaret” scheme with a space splitted time-derivative to two non-linear problems of two-phase filtration was considered. Based upon the problems solved there was shown that the superb transport characteristics of “Cabaret” pattern, superior to classic linear schemes, have a special application to the non-linear problems when a high accuracy is required.

©Nuclear Safety Institute, 1997

# Применение разностной схемы «Кабаре» в задачах двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей

*С.А.Карабасов*

## The application of “Cabaret” finite difference scheme to two-phase filtration problems of not-mingled fluids

*S.A.Karabasov*

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики  
113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52  
тел. : (095) 955-26-36, факс: (095) 958-11-51, эл.почта: kis@ibrae.ac.ru

### Содержание

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 3  |
| СКРЫТЫЕ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В СХЕМЕ “КАБАРЕ” .....                            | 4  |
| АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ .....   | 4  |
| УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА И БАКЛИ-ЛАВЕРЕТТА .....   | 5  |
| ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛАВЕРЕТТА В МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О ВЫТЕСНЕНИИ.....              | 6  |
| ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ “КАБАРЕ” ДЛЯ ЗАДАЧИ БАКЛИ-ЛАВЕРЕТТА.....   | 7  |
| ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМЫ “КАБАРЕ” В ЗАДАЧЕ О ГРАВИТАЦИОННОЙ СЕГРЕГАЦИИ НЕФТИ И ВОДЫ...9 |    |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....  | 11 |
| ЛИТЕРАТУРА .....   | 12 |

### Введение

В работе <sup>[1]</sup> была рассмотрена новая трехслойная явная разностная схема, названная “Кабаре”, для уравнения конвективного переноса с постоянными коэффициентами с пространственным расщеплением временной производной. Была доказана ее консервативность, ее второй порядок аппроксимации а также показано, что она обладает значительно улучшенными относительно классических линейных разностных схем “Уголок”, “Крест” и схемы Лакса-Вендроффа транспортными характеристиками. В этой же работе и более подробно в <sup>[2]</sup> были рассмотрены способы управления диссипативными и дисперсионными свойствами схемы “Кабаре” с помощью введения особого диссипатора, названного диссипатором Паниковского. К тому же в <sup>[1]</sup> и <sup>[2]</sup> были найдены два квадратичных закона сохранения, позволяющие построить однопараметрическое семейство законов сохранения.

Естественно далее будет ожидать плодотворного распространения “Кабаре” методики на уравнение переноса с нелинейной дивергентной частью и диффузионным членом. Это особенно актуально в тех задачах, где важно свойство “транспортности” для разностного шаблона, т.е. когда требуются разностные схемы с высокой разрешающей способностью. В этой связи будем использовать схему “Кабаре” для аппроксимации нелинейных уравнений двухфазной фильтрации: в задаче о двухфазном вытеснении нефти водой - продолжая работу, начатую в <sup>[3]</sup>, и в задаче о гравитационной сегрегации нефти и воды.

## Скрытые и виртуальные переменные в схеме “Кабаре”

Рассмотрим одномерное уравнение переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{ds}{dt} + c \frac{ds}{dx} = a_2 \frac{d^2s}{dx^2} \quad (2.1).$$

Аппроксимируя уравнение (2.1) по разностной схеме “Кабаре”<sup>[1]</sup>, имеем:

$$\begin{aligned} & \{(\hat{s}_n - s_n)/2 + (s_{n-1} - s_{n-1}^\vee)/2\} + R \cdot (\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = \\ & = R_2 \{(s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1})/2 + (s_n^\vee - 2s_{n-1}^\vee + s_{n-2}^\vee)/2\} \end{aligned} \quad (2.2),$$

где  $\text{Flux}_n = Rs_n$ ,  $R$  - число Куранта для переноса,  $R = c\tau/h$ ,  $R_2$  - число Куранта для диффузии,  $R_2 = a_2\tau/h^2$ . Введем переменную  $\Psi_n^\wedge = (\hat{s}_n + s_{n-1})/2$  и  $\Psi_n = (s_n + s_{n-1}^\vee)/2$  соответственно. Если теперь переписать уравнение (2.2), подставив  $\Psi$ , то снова имеем в  $\Psi$ -обозначениях:

$$\Psi_n^\wedge - \Psi_n + R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = R_2(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}) \quad (2.3).$$

Заметим, что в получившемся уравнении (2.3) переносится реальная хотя и “скрытая” величина  $\text{Flux}_n = Rs_n$ , а сама аппроксимация (2.3) принимает хорошо знакомый, стандартный вид. На каждом новом слое по времени определяется “виртуальная” величина  $\Psi_n^\wedge$  через которую затем пересчитывается реальная “скрытая” величина  $s_n$ . Оказывается, что запись “Кабаре” аппроксимации в виде (2.3) удобна и для содержательных выводов относительно схемы в целом.

## Априорные оценки

Для использования разностной схемы на практике является важным выполнение консервативных оценок, обеспечивающих сохранение некоторых неотрицательных величин, имеющих смысл энергии системы. Покажем, что “Кабаре” аппроксимация уравнения переноса удовлетворяет такому требованию<sup>[1]</sup>.

Для этого перепишем уравнение (2.3) без диффузионной части:

$$\Psi_n^\wedge - \Psi_n + R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = 0 \quad (3.0).$$

Преобразовываем потоки в (3.0):

$$\begin{aligned} R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) &= R(s_n - s_{n-1}) = \\ &= R\{0.5[(\hat{s}_n + s_n) - (s_{n-1} + s_{n-1}^\vee)] - 0.5[(\hat{s}_n + s_{n-1}) - (s_n + s_{n-1}^\vee)]\}. \end{aligned}$$

Затем умножим левую и правую часть (3.0) на выражение:

$$\Psi_n^\wedge + \Psi_n = [(\hat{s}_n + s_{n-1}) + (s_n + s_{n-1}^\vee)] = [(\hat{s}_n + s_n) + (s_{n-1} + s_{n-1}^\vee)].$$

В результате умножения получим:

$$0.5(\Psi_n^{\wedge 2} - \Psi_n^2)(1-R) + 0.5R(F_n^\wedge - F_{n-1}) = 0 \quad (3.1),$$

где  $F_n^\wedge = (\hat{s}_n + s_n)^2$  и  $F_{n-1} = (s_{n-1} + s_{n-1}^\vee)^2$  соответственно. Заметив, что  $(F_n^\wedge - F_{n-1}) =$

=  $[F_n^{\wedge} - F_n] + [F_n - F_{n-1}]$  перепишем (3.1) в виде:

$$(E_n^{\wedge 2} - E_n^2)(1-R) + R(F_n^{\wedge} - F_{n-1}) = 0 \quad (3.2),$$

где  $E_n = (S_n + S_{n-1}^{\vee})^2 + RF_n / (1-R)$ .

Наконец, просуммируя выражение (3.1) по всем внутренним точкам сеточной области, видим, что все члены, входящие в систему уравнений (3.2) внутри области взаимно сокращаются. Итак, в результате такой “Кабаре” аппроксимации переноса сохраняется величина:

$$E_n = (S_n + S_{n-1}^{\vee})^2 + RF_n / (1-R),$$

являющаяся квадратичной формой, положительно определенной при числах Куранта:  $0 < R < 1$ .

Таким образом, полученный закон сохранения позволяет надеяться на особенно хорошие результаты применения этой схемы в тех случаях, когда нужна повышенная точность вычислений.

## Уравнения Бюргерса и Бакли-Лаверетта

Рассмотрим уравнение переноса с простейшей нелинейностью в дивергентном члене, однако уже имеющее важные приложения на практике - уравнение Бюргерса

$$\frac{ds}{dt} + s \frac{ds}{dx} = a_2 \frac{d^2s}{dx^2} \quad (4.1).$$

В данном случае нас будет интересовать модификация уравнения Бюргерса вида:

$$\frac{ds}{dt} + f(s) \frac{ds}{dx} = a_2 \frac{d^2s}{dx^2} \quad (4.2).$$

Здесь  $f(s)$  - кусочно-линейная функция от  $s$  вида (рис.1):

$$f(s) = 2(s-sd)/(sm-sd) \text{ при } sd < s < sm \quad (4.3)$$

$$f(s) = (2sm-sd-s)/(sm-sd) \text{ при } sd < s < sm.$$

Заметим, что уравнение (4.2) имеет важное значение в теории двухфазной фильтрации. При  $a_2=0$  оно совпадает с уравнением одномерной двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей, известным в теории фильтрации как уравнение Бакли-Лаверетта<sup>[4]</sup>, где  $s$  - водонасыщенность. Уравнение Бакли-Лаверетта используется при крупномасштабном описании процесса вытеснения нефти водой - т.е. при малости капиллярных и гравитационных эффектов относительно инерционных

$$\frac{ds}{dt} + f(s) \frac{ds}{dx} = 0 \quad (4.4).$$

Соответственно при мелкомасштабном описании, т.е. при учете капиллярных сил, в уравнение Бакли-Лаверетта добавляется диффузионный член с  $a_2 \neq 0$ , отвечающий капиллярным эффектам.

В (4.4)  $f(s)$  - первая производная от функции Бакли-Лаверетта  $F(s) = f_2(s)/(f_2(s) + \mu_0 f_1(s))$ , где  $f_i(s)$   $i=1,2$  - относительные фазовые проницаемости,  $\mu_0$  - отношение вязкостей фаз  $\mu_0 = \mu_2/\mu_1$ . Согласно экспериментальным данным<sup>[4]</sup>  $f(s)$  имеет характерный выпуклый вид, поэтому аппроксимация ее в виде (4.3) является хорошим приближением, позволяющим проследить основные особенности фильтрации.



## Восстановление функции Лаверетта в модельной задаче о вытеснении

Рассмотрим типичную постановку одномерной задачи вытеснения нефти водой из образца в духе <sup>[4]</sup>.

В образец, насыщенный нефтью и изолированный с боков, начинают закачивать с левого, для определенности, торца воду. Справа находится образец с очень большой проводимостью к или в пределе очень большого  $k$  - свободное пространство. Тогда левым граничным будет

$$s(0,t)=s^{**}=2s_m-s_d \quad (5.0),$$

где  $s^{**}$  - максимально возможная водонасыщенность, при которой вся нефть находится в несвязанном состоянии.

Для решения задачи Бакли-Лаверетта (4.4) не требуется задавать правого граничного условия. Однако с добавлением капиллярного члена с  $a_2 \neq 0$  ситуация меняется и в этом случае обычно <sup>[4]</sup> правым граничным условием служит:

$$s(L,t)=s^*=s_d \quad \text{для гидрофобного образца} \quad (5.1)$$

$s^*$  - несвязанная водонасыщенность,

$$s(L,t) \approx s^{**}=2s_m-s_d \quad \text{для гидрофильного образца} \quad (5.2).$$

Начальное условие задается в виде Коши:

$$s(x,0)=s(x) \quad (5.3).$$

Из (3.4) видно, что линии равной насыщенности - изосаты- распространяются со скоростями  $f(s)$ , что в виду выпуклого вида  $f(s)$  приводит к возникновению скачка насыщенности. Именно наличие этого скачка и приводит к определенным численным трудностям при численном решении уравнения (4.4) поскольку явные бездиссипативные разностные схемы ( типа "Крест" ) здесь не годятся, вязкость же классических диссипативных схем ( типа "Уголок" ) слишком велика для адекватного описания процесса вытеснения, о чем подробнее чуть далее.

Будем решать уравнение (4.4) при граничных условиях вида (5.0), (5.1) и начальном условии (5.3) с  $s(x,0)=s^*$  вначале с помощью разностной схемы "Уголок"

$$\hat{S}_n - S_n + R_1 \cdot (Flax_n - Flux_{n-1}) = 0 \quad (5.4),$$

где  $\hat{S}_n, S_n$  - значения водонасыщенности на новом и текущем слоях соответственно,  $R_1 = c\tau/h$  - число Куранта для переноса,  $c=1$  а  $\text{Flux}_n = F(S_n)$ .

На первый взгляд такая разностная схема позволяет получать весьма удовлетворительные профили насыщенности, где размазывание “волны” скачка сосредоточено на 4-5 ячейках и основное изменение водонасыщенности сосредоточено в 1-2 ячейках. Однако, если далее по полученной кривой зависимости количества вытесненной нефти от количества закаченной воды попытаться в соответствии с методикой Велджа<sup>[5]</sup> для крупномасштабного описания восстановить вид заложенной функции Бакли-Лаверетта по формулам (5.5), получив  $F^*(s)$  “экспериментальную”, то расхождения полученной кривой с “теоретической” кривой полученной интегрированием (4.3) будет недопустимо большим. Действительно, используя

$$f_1(s)/f_2(s) = (\mu_1/\mu_2) \cdot (1 - dQ_1/dQ) \cdot dQ_1/dQ \quad (5.5)$$

$$1-s = 1/(mAL) \cdot \{ mAL \cdot (1-s^*) - Q_1 + Q \cdot dQ_1/dQ \},$$

определим  $F^*(s)$  и имеем (рис.2):

$$\max |F(s) - F^*(s)| \cong 0.1 [F(s) - F(s_m)], \quad s_{\text{скачка}} < s < s^{**} \quad (5.6).$$

В (5.5) и (5.6)  $s_{\text{скачка}}$  - водонасыщенность на скачке,  $\Delta F(s) = [F(s) - F(s_m)]$  - характерный масштаб изменения функции Лаверетта после прорыва воды,  $Q_1$  - выход нефти,  $Q$  - выход воды,  $A$  - сечение образца,  $L$  - его длина,  $m$  - пористость образца, значения  $s_m$  и  $s_d$  брались 0.6 и 0.5.

Таким образом и в самом деле точность таких расчетов совершенно неприемлема при мелкомасштабном описании с учетом капиллярного члена (см.<sup>[5]</sup>) когда ширина стабилизированной зоны - зоны диффузионного размытия - порядка 10% от характерной длины образца.

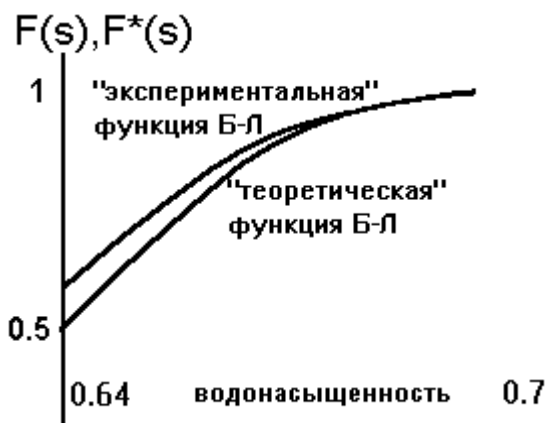


рис . 2

## Использование схемы повышенной точности “Кабаре” для задачи Бакли-Лаверетта

В соответствии с теорией, развитой в <sup>[1]</sup>, <sup>[2]</sup> аппроксимируем уравнение (4.4) разностной схемой с пространственным расщеплением временной производной, дивергентную часть, как и ранее, запишем в потоковом виде:

$$\{ (\hat{S}_n - S_n)/2 + (S_{n-1} - S_{n-1}^\vee)/2 \} + R \cdot (\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = 0 \quad (6.1).$$

Здесь  $\hat{s}_n$ ,  $s_n$ ,  $s_{n-1}^\vee$  значения водонасыщенности на новом, текущем и предыдущем слоях соответственно,  $\text{Flux}_n = F(s_n)$ ,  $R = \sigma\tau/h$  - число Куранта для переноса, как и прежде. Для получения недостающих начальных данных первый шаг производится по двухслойной схеме “Уголок”. Однако как и схема “Крест”, “Кабаре” является бездиссипативной схемой, поэтому для решений с разрывом типа скачка насыщенности ее необходимо модифицировать. Однако отметим, что делать это нужно осторожно дабы не потерять ее ценные для нас качества. Так, например, введение в правую часть искусственной вязкости ситуации не спасает - существенно изменить дело к лучшему при восстановлении функции Лаверетта в задаче о вытеснении не удастся. Введем в соответствии с <sup>[2]</sup> в (6.1) диссипатор Паниковского

$$\{(1+\varepsilon)(\hat{s}_n - s_n)/2 + (1-\varepsilon)(s_{n-1} - s_{n-1}^\vee)/2\} + R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = 0 \quad (6.2).$$

По ходу заметим, что схема (6.1) переходит в “Уголок” при  $\varepsilon=1$ . При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  в схеме появляется довольно мощная диссипация (ширина размазывания скачка водонасыщенности достигает 15 ячеек при  $\varepsilon=5$ ).

Оказывается возможным при соответствующем согласовании начальных данных и подборе соответствующего  $\varepsilon$  оптимизировать схему (6.1) так, что разброс значений:

$$\max |F(s) - F^*(s)| < 0.01\Delta F(s), s_{\text{скачка}} < s < s^{**},$$

где, как и прежде,  $s_{\text{скачка}}$  - водонасыщенность на скачке а  $\Delta F(s) = [F(s) - F(s_m)]$ .

Приведем результаты расчетов. Для них использовалось большое число Куранта  $R=0.99$ , счет проводился на равномерной сетке в 100 ячеек, производилось 600 шагов по времени. Причем первые 30 шагов по времени проводились с  $\varepsilon=1$ , которое оказалось оптимальным для формирования фронта “скачка”. Далее счет продолжался с  $\varepsilon=0.0005$  - уже на границе устойчивости используемой схемы. Скачок достигал правого торца примерно на 300 шаге по времени, иными словами через 300 единиц условного времени происходил прорыв воды, после чего и происходило определение функции Бакли-Лаверетта  $F^*(s)$  в соответствии с (5.5). Для сравнения были также проведены расчеты по разностной схеме “Уголок”, оказалось, что получаемая при этом точность как минимум на порядок хуже, чем в модифицированной “Кабаре” схеме.

Были проведены расчеты по “Кабаре” методике и для случая с ненулевой диффузионной частью в (1.3), учитывающей капиллярные эффекты. Расчеты проводились для трех чисел Куранта  $R_2$ , отвечающих трем различным коэффициентам капиллярной диффузии. Оказалось, что при увеличении  $R_2$  на порядок, “теоретическая” функция Лаверетта и “экспериментальная” разнятся вдвое:

$$\max |F(s) - F^*(s)| / \Delta F(s) = 0.01; 0.03; 0.06 -$$

для  $R_2=0.0025; 0.025; 0.25$  соответственно.

Данный факт позволяет еще раз убедиться в слабой зависимости решения задачи о вытеснении от капиллярной правой части.

## Использование схемы “Кабаре” в задаче о гравитационной сегрегации нефти и воды

Как уже отмечалось, одномерное уравнение Бакли-Лаверетта (4.4)  $\frac{ds}{dt} + f(s) \frac{ds}{dx} = 0$ , где  $f(s)$  - первая производная от функции Бакли-Лаверетта  $F(s) = f_2(s) / (f_2(s) + \mu_0 f_1(s))$ , является следствием более общего уравнения. Это более общее уравнение может быть приведено к виду (4.4) и при пренебрежении капиллярной частью выглядит <sup>[5]</sup>:



$$\frac{ds}{dt} + \varphi(s, \Delta\rho, \alpha, g) \frac{ds}{dx} = 0 \quad (6.1),$$

здесь  $\Delta\rho$  - разница плотностей воды и нефти:  $\Delta\rho = \rho_v - \rho_n$ ,  $\alpha$  - угол наклона оси "x" относительно направления вектора ускорения свободного падения  $g$ . В выражении (6.1)  $f(s, \Delta\rho, \alpha, g)$  - первая производная по водонасыщенности  $s$  от функции  $\Phi(s, \Delta\rho, \alpha, g)$ :

$$\Phi(s, \Delta\rho, \alpha, g) = F(s) \cdot [1 - (f_1(s)A / \mu_n q)] \cdot \Delta\rho \cdot \sin \alpha \quad (6.2),$$

где  $A$  - сечение образца,  $q$  - суммарный поток нефти и воды,  $\mu_n$  - вязкость нефти а  $F(s) = f_2(s) / (f_2(s) + \mu_0 f_1(s))$  - функция Бакли-Лаверетта, как и ранее.

Если суммарный поток равен нулю или очень мал, как это бывает в образце с непроницаемыми границами, и считая, что вода находится сверху относительно нефти, то формулу (6.2) можно переписать в виде:

$$\Phi(s) = \beta \cdot F(s) \cdot f_1(s), \text{ где } \beta = -(A / \mu_n q) \cdot \Delta\rho \cdot \sin \alpha \quad (6.3).$$

Теперь рассмотрим задачу о гравитационной сегрегации нефти и воды <sup>[5]</sup>. Имеется одномерный пористый образец, непроницаемый с концов, и в начальный момент сверху пропитанный водой а снизу нефтью. Требуется определить распределение водонасыщенности в дальнейшие промежутки времени.

Дифференциальная задача ставится следующим образом.

Граничными условиями будут условия непротекания - равенство нулю потоков нефти и воды на левом и правом торце соответственно:

$$q_v(0,t) = q_n(0,t); \quad q_v(L,t) = q_n(L,t) \quad (6.4).$$

Само уравнение переноса:

$$\frac{ds}{dt} + \varphi(s) \frac{ds}{dx} = 0 \quad (6.5),$$

где  $\varphi(s) = \Phi'_s = (\beta \cdot F(s) \cdot f_1(s))'_s$ .

Зададим зависимости относительных фазовых проницаемостей (ОФП) воды и нефти от водонасыщенности в соответствии с <sup>[5]</sup> соответственно:

$$f_1(s) = ((2sm - sd - s) / (2sm - 2sd))^2 \text{ и } f_2(s) = ((s - sd) / (2sm - 2sd))^2.$$

Начальное распределение водонасыщенности как и в задаче о вытеснении зададим кусочно-линейной функцией:

$$\begin{aligned} s &= 2sm - sd & 0 < x < L/2 - \delta \\ s &= 2sm - sd - (x - L/2 + \delta) \cdot (sm - sd) / \delta & L/2 - \delta < x < L/2 + \delta \\ s &= sd & L/2 + \delta < x < L \end{aligned}$$

Существенным является, что при таких ОФП функция  $\Phi(s)$  имеет максимум в центре области определения  $sd < s < 2sm - sd$  при  $s = sd$ .

Вследствие этого первая производная функции  $\Phi(s)$ , имеющая смысл скорости переноса -  $\varphi(s)$  - обращается в нуль при  $s = sd$ , а следовательно меняет знак (рис.3). Таким образом снова, как и в случае задачи Бакли-Лаверетта о вытеснении, непрерывного решения задачи Коши не существует и решение терпит разрыв. Однако в данном случае вместо одного скачка насыщенности возникает два — один распространяется в сторону положительного направления оси "x", другой - в противоположную: в соответствии с направлением скорости переноса  $\varphi$ .



Для решения аппроксимируем уравнение (6.5) “Кабаре” шаблонами в направлении скорости переноса и вводя диссипатор Паниковского, имеем:

при  $\varphi(s) > 0$

$$\{(1+\varepsilon)(\hat{S}_n - S_n)/2 + (1-\varepsilon)(S_{n-1} - S_{n-1}^\vee)/2\} + R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = 0 \quad (6.5.1),$$

при  $\varphi(s) < 0$

$$\{(1+\varepsilon)(\hat{S}_{n-1} - S_{n-1})/2 + (1-\varepsilon)(S_n - S_n^\vee)/2\} + R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = 0 \quad (6.5.2).$$

Здесь  $\hat{S}_n$ ,  $S_n$ ,  $S_{n-1}^\vee$  значения водонасыщенности на новом, текущем и предыдущем слоях соответственно,  $\text{Flux}_n = \Phi(S_n)$ ,  $R = c\tau/h$  - как и ранее, число Куранта для переноса.

Граничные условия непротекания записываются учитывая равенство нулю потоков с непроницаемых границ и имеют вид:

на левой границе:

$$\hat{S}_1 = S_1 - [(1-\varepsilon)(S_2 - S_2^\vee) - 2R(\text{Flax}_2 - \text{Flux}_1)] / (1+\varepsilon) = 0 \quad (6.6.1)$$

на правой границе:

$$\hat{S}_n = S_n - [(1-\varepsilon)(S_{n-1} - S_{n-1}^\vee) - 2R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1})] / (1+\varepsilon) = 0 \quad (6.6.2).$$

Новые значения для водонасыщенности в узлах ячейки, где скорость переноса меняет знак, будем каждый раз определять специально. А именно, пусть в узлах  $m-1$  и  $m$  скорость переноса меняет знак, тогда аппроксимируем уравнение (6.5) следующим образом:

$$\{(\hat{S}_m - S_m)/2 + (\hat{S}_{m-1} - S_{m-1})/2\} + R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) = 0.$$

Далее, выражая неизвестные на верхнем слое, имеем:

$$\hat{S}_{m-1} + \hat{S}_m = (S_m + S_{m-1}) - 2R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1}) \quad (6.6.2).$$

Что касается нахождения самих водонасыщенностей  $\hat{S}_{m-1}$  и  $\hat{S}_m$  по отдельности, то их можно определить из уравнения (6.6.2), раздав с “весом”  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ):

$$\hat{S}_{m-1} = (1-\lambda)\{(S_m + S_{m-1}) - 2R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1})\} \quad (6.6.3)$$

$$\hat{S}_m = \lambda\{(S_m + S_{m-1}) - 2R(\text{Flax}_n - \text{Flux}_{n-1})\}.$$

Были проведены численные расчеты при различных  $\varepsilon=0.3, 0.5, 1, 10$  и  $\lambda=0.49, 0.5, 0.501, 0.51, 0.52$ . Результаты показали, что уже при минимальном отклонении  $\lambda$  от 0.5 возникают паразитные осцилляции, задавить которые даже с помощью диссипатора Паниковского с большим значением  $\varepsilon$  не удастся. Профиль насыщенности для  $\lambda=0.5$  представлен на рис.4.

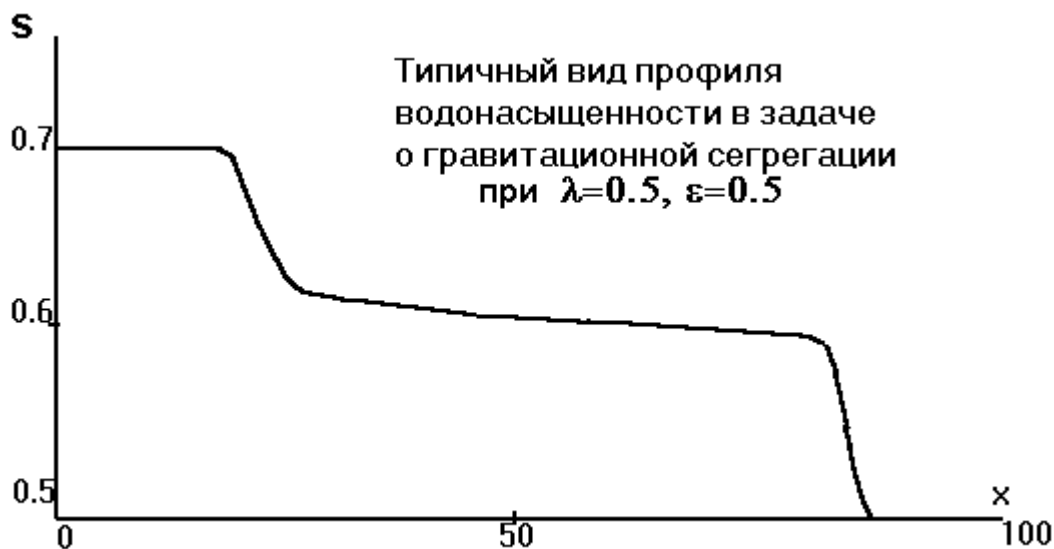


рис.4

## Заключение

Новая перспективная трехслойная разностная схема “Кабаре”, отлично показавшая себя при решении линейных уравнений на равномерных и неравномерных сетках, оказалась весьма эффективной и для решения квазилинейных уравнений, возникающих в теории двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей.

Так при решении обратной задачи двухфазной фильтрации по определению функции Бакли-Лаверетта по данным о вытеснении оказывается важным с высокой точностью строить кривую расходов. Решением возникшей проблемы, когда нужно “мягкое” включение диссипации может послужить модифицированная явная схема высокой точности с пространственным расщеплением временной производной “Кабаре”. В этой задаче оказалось, что наилучшим способом необходимая диссипация вводится с помощью специфического диссипатора Паниковского, позволяющего с достаточной точностью производить расчеты.

Так же достаточно неплохо разностная схема “Кабаре” зарекомендовала себя и при решении задачи о гравитационной сегрегации нефти и воды, которая представляет собой тему для отдельного исследования. Здесь при еще более сильной, чем в предыдущей задаче, нелинейности в дивергентной части удалось получить хорошие качественные результаты.

## Литература

1. Головизнин В.М., и др. ”Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной (в печати)
2. Головизнин В.М., и др. “Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре”” (в печати)
3. Карабасов С.А., Семенов В.Н. “Одномерная модель двухфазной фильтрации в пористых средах”, Препринт № IBRAE-97-04
4. Баренблатт Г.Е. “Движение жидкости и газа в пористых пластах”, Москва, Недра 1984г
5. Коллинз Р. “Течение жидкости через пористые материалы”, Москва, Мир 1964г