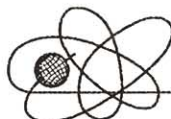




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2002-06

Preprint IBRAE-2002-06

Н. В. Ёлкина, А. А. Леонов, В. В. Чуданов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ
МЕТОДОМ КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ
АППРОКСИМАЦИИ**

Ёлкина Н.В., Леонов А.А., Чуданов В.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ. Препринт № ИБРАЕ-2002-06. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 24 с.

Аннотация

В работе обсуждается применение метода кусочно-параболической аппроксимации к расчетам сверхзвуковых течений с вязкостью.

©ИБРАЭ РАН, 2002

Elkina N.V., Leonov A.A., Chudanov V.V. MODELING OF SUPERSONIC CURRENTS BY A METHOD OF PIECEWISE PARABOLIC APPROXIMATION. Preprint IBRAE-2002-06. Moscow: Nuclear Safety Institute RAS, 2002. 24 p.

Abstract

An application of a method of piecewise parabolic approximation to calculate supersonic currents with viscosity is considered in paper.

Моделирование сверхзвуковых течений методом кусочно-параболической аппроксимации

Н.В.Елкина, А.А.Леонов, В.В.Чуданов

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ
113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52
тел.: (095) 955-26-20, факс: (095) 230-20-29, эл. почта: chud@ibrae.ac.ru

Содержание

Введение.....	3
1 Постановка задачи.....	4
2 Процедура расщепления по направлениям в лагранжевых координатах.....	7
3 Метод Годунова и метод РРМ.....	9
3.1 Метод РРМ.....	9
3.2 Метод Годунова.....	10
4 Интерполяция на эйлерову сетку.....	11
5 Учет вязкости.....	13
6 Сглаживание решения.....	14
7 Результаты расчетов.....	15
7.1 Задача Сода.....	15
7.2 Обтекание уступа $M=3$	16
7.3 Взаимодействие ударной волны с пузырьком.....	17
7.4 Трехмерная задача Сода.....	19
7.5 Двойное маховское отражение (Double Mach Reflection).....	20
Заключение.....	21
Литература.....	24

Введение

В вычислительной гидродинамике часто возникает необходимость моделировать нестационарные течения в нетривиальных расчетных областях, в которых развивается сложная картина ударных волн и разрывов. В таких ситуациях классические немонотонные методы с введением псевдовязкости, используемые для расчета ударных волн, зачастую неприменимы из-за невысокой точности и искажения решений. В таких случаях хорошие результаты дает применение монотонных нелинейных методов. Одним из них является метод Годунова, основанный на решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва, который возникает между ячейками с кусочно-непрерывными параметрами течения [7]. Такой произвольный разрыв распадается, в общем случае, на контактный разрыв, волну разрежения и ударную волну [3]. Для расчета переноса в этом случае используется численная схема второго порядка точности.

Основная идея метода Годунова заключается в том, чтобы решить задачу Римана последовательно для каждой ячейки или для каждой области течения, а затем получившиеся локальные аналитические решения объединить их в общее решение. Включение информации, получаемой из задачи Римана в решение полной задачи, позволяет рассчитывать ударные волны существенно точнее, чем по классическим методам [1]. Важная особенность метода Годунова заключается в сшивании разрывных решений. Эти разрывные решения дают приемлемую аппроксимацию для соответствующих гладких решений и оказываются намного лучшими по сравнению с классическими методами при аппроксимации решений с разрывами.

В основе своей метод Годунова является двухшаговым. Сначала решается задача Римана и находятся вспомогательные величины, а затем используется метод второго порядка точности для получения результатов на выбранной сетке. Для повышения точности метода Годунова, а также луч-

шего разрешения ударных волн используется метод кусочно-параболической аппроксимации или PPM (PieceWise-parabolic Method), разработанный Вудвардом и Колеллой [2].

В методе PPM решение задачи Римана используется в численной схеме второго порядка точности для аппроксимации системы уравнений Эйлера.

1 Постановка задачи

Для моделирования полномасштабной структуры течения вязкого теплопроводного газа используется система уравнений Навье-Стокса [5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = -f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho E v_j + p v_j) = -f_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} v_j + \kappa \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \quad (1.3)$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x^k} \right) - \text{тензор вязких напряжений,}$$

$$E = e + \frac{1}{2} \sum_i v_i^2 - \text{удельная плотность полной энергии системы,}$$

e – внутренняя энергия,

f_i - объемная плотность внешних сил.

Система уравнений (1.1)-(1.3) переходит в систему уравнений Эйлера при условии:

$$\mu = \kappa = 0, \quad (1.4)$$

т.е. когда мы пренебрегаем вязкостью и теплопроводностью газа.

В случае идеального газа система (1.1)-(1.3) замыкается уравнением состояния:

$$p = (\gamma - 1) \rho e$$

Начальные и граничные условия сформулируем в общем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) = u_0, \quad p(x, y, z, 0) = p_0, \quad \rho(x, y, z, 0) = \rho_0, \\ u(B, 0) = u_B, \quad p(B, 0) = p_B, \quad \rho(B, 0) = \rho_B \end{aligned}$$

Здесь подиндекс В - обозначает границы рассматриваемой в задаче области.

Обозначив в уравнениях (1.1)-(1.3) компоненты скорости через u, ϑ, w и используя равенство (1.4), получим систему уравнений Эйлера для идеального газа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \vartheta \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u \vartheta \\ \rho u w \\ \rho u E + p u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho \vartheta \\ \rho \vartheta u \\ \rho \vartheta^2 + p \\ \rho \vartheta w \\ \rho \vartheta E + p \vartheta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w \vartheta \\ \rho w^2 + p \\ \rho w E + p w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ex} \\ f_{ey} \\ f_{ez} \\ \vec{f}_e \vec{\mathcal{G}} \end{pmatrix} \quad (1.5).$$

Перейдем от переменных Эйлера (x, y, z, t) к переменным Лагранжа (s_x, s_y, s_z, t) , где

$$s_x = \int_{x_0}^x \rho(x, y, z) dx, \quad s_y = \int_{y_0}^y \rho(x, y, z) dy, \quad s_z = \int_{z_0}^z \rho(x, y, z) dz$$

Рассмотрим первое уравнение непрерывности:

$$(\partial \rho / \partial t + u \partial \rho / \partial x + \vartheta \partial \rho / \partial y + w \partial \rho / \partial z) + \rho \partial u / \partial x + \rho \partial \vartheta / \partial y + \rho \partial w / \partial z = 0,$$

где в скобках выделено выражение для полной (лагранжевой) производной от плотности. Учитывая, что $\partial s_x = \rho \partial x$, $\partial s_y = \rho \partial y$, $\partial s_z = \rho \partial z$, получим окончательно:

$$d\rho / dt + \rho^2 \partial u / \partial s_x + \rho^2 \partial \vartheta / \partial s_y + \rho^2 \partial w / \partial s_z = 0$$

или

$$d / dt (1 / \rho) = \partial u / s_x + \partial \vartheta / \partial s_y + \partial w / \partial s_z \quad (1.6)$$

Аналогично запишем второе уравнение в виде:

$$(\partial(\rho u) / \partial t + u \partial(\rho u) / \partial x + \vartheta \partial(\rho u) / \partial y + w \partial(\rho u) / \partial z) + \rho u \partial u / \partial x + \rho u \partial \vartheta / \partial y + \rho u \partial w / \partial z + \partial p / \partial x = f_{ex}$$

Здесь также в скобках выделено значение полной производной от произведения плотности и компоненты скорости вдоль оси x . При переходе к переменным Лагранжа, получим:

$$d(\rho u) / dt + \rho^2 u (\partial u / \partial s_x + \partial \vartheta / \partial s_y + \partial w / \partial s_z) = f_{ex} - \rho \partial p / \partial s_x$$

В первом слагаемом подставив значение $d\rho / dt$ из уравнения (1.6), получим:

$$\rho du / dt = f_{ex} - \rho \partial p / \partial s_x$$

или

$$du / dt = -\partial p / \partial s_x + f_{ex} / \rho \quad (1.7)$$

Также точно преобразуются третье и четвертое уравнения системы (1.5):

$$d\vartheta / dt = -\partial p / \partial s_y + f_{ey} / \rho \quad (1.8)$$

$$dw / dt = -\partial p / \partial s_z + f_{ez} / \rho \quad (1.9)$$

Выделим полную производную от произведения плотности на полную энергию единицы массы газа в последнем уравнении системы (1.5):

$$\begin{aligned} d(\rho E) / dt + \rho E(\partial u / \partial x + \partial \vartheta / \partial y + \partial w / \partial z) + \\ \partial(\rho u p) / \partial x + \partial(\rho \vartheta p) / \partial y + \partial(\rho w p) / \partial z = \vec{f}_e \mathcal{F} \end{aligned}$$

При переходе к массовым переменным, как и при выводе уравнения (1.7), подставив в первом слагаемом значение $d\rho / dt$ из уравнения (1.6), получим:

$$\rho dE / dt + \rho \partial(\rho u p) / \partial s_x + \rho \partial(\rho \vartheta p) / \partial s_y + \rho \partial(\rho w p) / \partial s_z = \vec{f}_e \mathcal{F}$$

или

$$dE / dt = \vec{f}_e \mathcal{F} / \rho - \partial(\rho u p) / \partial s_x - \partial(\rho \vartheta p) / \partial s_y - \partial(\rho w p) / \partial s_z \quad (1.10)$$

Окончательно, система уравнений (1.5) в лагранжевых массовых переменных будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 / \rho \\ u \\ \vartheta \\ w \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_x} \begin{pmatrix} -u \\ p \\ 0 \\ 0 \\ \rho u p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_y} \begin{pmatrix} -\vartheta \\ 0 \\ p \\ 0 \\ \rho \vartheta p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_z} \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \\ p \\ \rho w p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ex} / \rho \\ f_{ey} / \rho \\ f_{ez} / \rho \\ \vec{f}_e \mathcal{F} / \rho \end{pmatrix} \quad (1.11),$$

где $E = e + \frac{u^2 + \vartheta^2 + w^2}{2}$ Здесь учтено, что в лагранжевых переменных частные производные по времени совпадают с полными [3].

Для численного решения системы (1.11) применим аддитивную разностную схему с целыми шагами [8]. В операторно-разностном виде система (1.11) выглядит следующим образом:

$$(U_{n+1} - U_n) / t + AF(U_n) = \varphi_n \quad (1.12),$$

где A некоторый постоянный оператор, $U = (1 / \rho, u, \vartheta, w, E)^T$ Оператор A имеет 3-х компонентное расщепление на сумму постоянных операторов: $A = \sum_{\alpha=1}^3 A^{(\alpha)}$ Каждый из операторов соответствует дифференцированию по лагранжевой массовой переменной вдоль соответствующего направления ($A^{(1)} = \partial / \partial s_x$, $A^{(2)} = \partial / \partial s_y$, $A^{(3)} = \partial / \partial s_z$). Переход с временного слоя t_n на t_{n+1} слой в схеме, являющейся разностным аналогом системы (1.12), будет основываться на последовательном решении трех начально-краевых задач для операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ Для определения значений $U^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$ используются системы уравнений ($t_n < t \leq t_{n+1}$):

$$\begin{aligned} dU^{(1)} / dt + A^{(1)} F(U^{(1)}) &= \varphi^{(1)}(t) \\ dU^{(2)} / dt + A^{(2)} F(U^{(2)}) &= \varphi^{(2)}(t) \\ dU^{(3)} / dt + A^{(3)} F(U^{(3)}) &= \varphi^{(3)}(t) \\ \sum_{\alpha=1}^3 \varphi^{(\alpha)}(t) &= \varphi(t) \end{aligned} \quad (1.13),$$

дополненные соответствующими начальными и краевыми условиями.

Начальные условия в общем виде можно записать следующим образом:

$$U^{(1)}(0) = U^0, \quad U^{(1)}(t_n) = U^{(3)}(t_n), \quad U^{(2)}(t_n) = U^{(1)}(t_{n+1}), \quad U^{(3)}(t_n) = U^{(2)}(t_{n+1})$$

При реализации описанной схемы сначала решается уравнение для $U^{(1)}(t)$ при начальном условии $U^{(1)}(t_n) = U^{(3)}(t_n)$ и находится $U^{(1)}(t_{n+1})$, которое используется в качестве начального для определения $U^{(2)}(t)$ и т.д. За приближенное решение задачи на момент времени t_{n+1} принимается $U(t_{n+1}) = U^{(3)}(t_{n+1})$

При условии независимости от времени операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ решение системы (1.13) аппроксимирует исходную задачу (1.11) с первым порядком при допущении о достаточной гладкости точного решения [8].

Каждая отдельная промежуточная задача из (1.13) не аппроксимирует исходную задачу (не дает приближенное решение), и только последовательное решение всех промежуточных задач с их согласованием через начальные условия позволяет получить приближенное решение. В этом случае считается, что задача (1.13) аппроксимирует исходную задачу (1.11) в суммарном смысле (суммарная аппроксимация).

В качестве примера рассмотрим первую систему уравнений из (1.13):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1/\rho \\ u \\ \vartheta \\ w \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_x} \begin{pmatrix} -u \\ p \\ 0 \\ 0 \\ up \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ex}/\rho \\ 0 \\ 0 \\ f_{ex}u/\rho \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

которая описывает одномерное течение газа. Аналогичные промежуточные системы уравнений получаются при расщеплении оператора A по другим направлениям.

Таким образом, при помощи метода расщепления по направлениям можно представить решение системы уравнений Эйлера (1.5), как последовательное решение более простых систем уравнений, описывающих одномерное течение газа в лагранжевых массовых координатах. Решение рассматриваемой многомерной задачи можно свести к решению локальных одномерных задач Римана вдоль соответствующих направлений. Ниже подробно описана процедура расщепления по направлениям в лагранжевых координатах, а также численная схема всего метода Годунова и метода PPM.

Для решения многих задач существенны явления, связанные с диссипацией кинетической энергии, ниже приведен способ учета этих процессов в численной схеме. Для сглаживания нефизических осцилляций решения вблизи ударных волн обычно применяется функция-лимитер, которая также описывается ниже.

2 Процедура расщепления по направлениям в лагранжевых координатах

Задача о распаде произвольного разрыва, которая лежит в основе метода Годунова, имеет аналитическое решение только в одномерном случае. Поэтому для обобщения метода Годунова на многомерные случаи используется описанный в предыдущем разделе прием расщепления по направлениям в лагранжевых массовых координатах. Для каждого направления решается система одномерных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s} = G, \quad (2.1),$$

или

$$U = \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -u \\ p \\ (pu) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ (fu) \end{pmatrix},$$

$$\rho = \frac{1}{\tau}, \quad e = E - \frac{1}{2} \left(\sum_i v_i^2 \right), \quad p = (\gamma - 1) \rho e,$$

e - внутренняя энергия системы, f - массовая плотность внешних сил, s - лагранжева массовая координата.

Полученные при решении этой системы распределения физических величин ρ, u, p используются в качестве начальных условий для решения промежуточной задачи вдоль другого направления.

Начальные условия формулируются в общем виде на эйлеровой сетке с последующим переводом на лагранжеву. После завершения расчетного цикла происходит обратная интерполяция на исходную эйлерову сетку для последующей обработки результатов и подготовки расчетной лагранжевой сетки для следующего временного шага.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, интегрирование по времени в промежутке $(t, t + \Delta t)$ разностных аналогов уравнений Эйлера осуществляется в несколько этапов: сначала система уравнений решается в направлении одной из осей, получается первое приближение решения, затем оно используется в качестве начального условия для решения одномерной задачи в другом направлении и так далее.

Рассмотрим этот метод подробнее для направления вдоль оси x . Для решения этой задачи запишем разностный аналог системы уравнений (2.1) в виде:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right) + \Delta t (G_i^n) \quad (2.2),$$

где

$$U_i^n = \begin{pmatrix} \tau_i^n \\ u_i^n \\ E_i^n \end{pmatrix}, \quad F_{i+1/2}^n = \begin{pmatrix} -\bar{u}_{i+1/2}^n \\ \bar{p}_{i+1/2}^n \\ (\bar{p}\bar{u})_{i+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad G_j^n = \begin{pmatrix} 0 \\ f_i^n \\ (fu)_i^n \end{pmatrix}.$$

Найденные значения плотности, скорости и давления используются в качестве начальных условий для решения задачи по направлению y или z . При этом должно быть установлено взаимно однозначное соответствие для нумераций узлов в различных направлениях:

$$i \Leftrightarrow j \Leftrightarrow k$$

Теперь запишем разностную схему (2.2) в виде [2]:

$$x_{i+1/2}^{n+1} = x_{i+1/2}^n + \Delta t \bar{u}_{i+1/2}^n,$$

$$\tau_i^{n+1} = \frac{x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta s_i},$$

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(\bar{p}_{i-1/2} - \bar{p}_{i+1/2} \right) + \Delta t f_i^n \\
E_i^{n+1} &= E_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(\bar{u}_{i-1/2} \bar{p}_{i-1/2} - \bar{u}_{i+1/2} \bar{p}_{i+1/2} \right) + \Delta t u_i^n f_i^n \\
\rho_i^{n+1} &= \frac{1}{\tau_i^{n+1}} \\
e_i^n &= E_i^{n+1} - \frac{1}{2} (u_i^{n+1})^2 \\
p_i^{n+1} &= (\gamma - 1) \rho_i^{n+1} e_i^{n+1} \\
T_i^{n+1} &= \frac{\gamma - 1}{R} e_i^{n+1}
\end{aligned}$$

где $x_{i+1/2}$ - это лагранжева координата правой границы ячейки. Величины $\bar{u}_{i+1/2}^n, \bar{p}_{i+1/2}^n$ находятся с помощью метода Годунова из решения задачи о распаде разрыва на границе ячейки $x_{i+1/2}$

3 Метод Годунова и метод PPM

3.1 Метод PPM

Как уже отмечалось величины $\bar{u}_{j+1/2}, \bar{p}_{j+1/2}$ находятся с помощью метода Годунова и метода PPM. В основе метода Годунова лежит решение задачи Римана [3, 6] на границах каждой ячейки. В отличие от обычного метода Годунова, где давление и скорость слева и справа от рассматриваемой границы ячейки имеют постоянные значения, в методе PPM эти величины интерполируются квадратичным полиномом, узлами которого являются значения скорости и давления в полуцелых узлах сетки $p_{j+1/2}, u_{j+1/2}$

Полином строится таким образом, чтобы среднее по данной ячейке значение этого полинома совпадало со значением скорости или давления в целом узле.

Значения величин слева и справа от границы разрыва получаются при помощи процедуры усреднения по соответствующим областям зависимости. Подробно эта процедура описана в [2].

В качестве примера рассмотрим интерполяцию профиля давления. Соответствующий квадратичный полином будет иметь вид:

$$p(x) = p_{L,j} + \xi (\Delta p_j + p_{6,j} (1 - \xi)),$$

где

$$\xi = \frac{x - x_{j-1/2}}{\Delta x_j}, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2},$$

$$\Delta p_j = p_{R,j} - p_{L,j}, \quad p_{6,j} = 6 \left(p_j - \frac{1}{2} (p_{R,j} + p_{L,j}) \right)$$

$$du \pm \frac{dp}{C} = f dt \quad \text{вдоль характеристики} \quad ds = \pm C dt,$$

где $C = (\gamma p \rho)^{1/2}$, s – лагранжева массовая координата.

Остановимся кратко на алгоритме вычисления $\bar{u}_{j+1/2}$, $\bar{p}_{j+1/2}$. Для конструирования значений скорости и давления слева и справа от границы разрыва используются только те части каждой ячейки слева и справа от $s_{j+1/2}$, которые входят в область зависимости для интервала (t^n, t^{n+1})

Величины $\bar{p}_{j+1/2}$, $\bar{u}_{j+1/2}$ удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений:

$$\frac{\bar{p}_{j+1/2} - P_{j+1/2,L}}{W_L} + (\bar{u}_{j+1/2} - u_{j+1/2,L}) = 0; W_L^2 = (\gamma P_{j+1/2,L} \rho_{j+1/2,L}) \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left[\frac{\bar{p}_{j+1/2}}{P_{j+1/2,L}} - 1 \right] \right)$$

$$\frac{\bar{p}_{j+1/2} - P_{j+1/2,R}}{W_R} - (\bar{u}_{j+1/2} - u_{j+1/2,R}) = 0; W_R^2 = (\gamma P_{j+1/2,R} \rho_{j+1/2,R}) \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left[\frac{\bar{p}_{j+1/2}}{P_{j+1/2,R}} - 1 \right] \right),$$

где $P_{j+1/2,L}$, $P_{j+1/2,R}$, $u_{j+1/2,L}$, $u_{j+1/2,R}$ – значения давления и скорости слева и справа от границы раздела ячеек, усредненные по соответствующей области зависимости.

Чтобы решить эту систему, используем метод Ньютона с фиксированным числом итераций [4, 7]. Кратко остановимся на описании этого метода. Пусть имеется нелинейное уравнение $f(x) = 0$

Допустим, что это уравнение имеет корень ξ , для нахождения которого нужно выбрать начальное приближение x_0 . Тогда корень нашего уравнения отыскивается с помощью процедуры:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\dots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

повторяемой требуемое число раз (до достижения заданной точности). Здесь введено обозначение $f'(x_n)$ для первой производной функции $f(x_n)$

Этот итерационный процесс быстро сходится, если начальное приближение x_0 выбрано достаточно близко к корню уравнения.

4 Интерполяция на эйлерову сетку

После завершения расчета на очередном временном шаге происходит интерполяция плотности, скорости, давления и энергии на исходную эйлерову сетку. Этот шаг необходим для того, чтобы учесть деформации, которые может испытывать лагранжева сетка в процессе расчета.

Рассмотрим алгоритм переинтерполяции. Относительно эйлеровой сетки перемещения узлов лагранжевой сетки выглядят как втекание и вытекание массы, импульса и энергии через неподвижные границы эйлеровой сетки.

$$du \pm \frac{dp}{C} = f dt \quad \text{вдоль характеристики} \quad ds = \pm C dt ,$$

где $C = (\gamma p \rho)^{1/2}$, s – лагранжева массовая координата.

Остановимся кратко на алгоритме вычисления $\bar{u}_{j+1/2}$, $\bar{p}_{j+1/2}$. Для конструирования значений скорости и давления слева и справа от границы разрыва используются только те части каждой ячейки слева и справа от $s_{j+1/2}$, которые входят в область зависимости для интервала (t^n, t^{n+1})

Величины $\bar{p}_{j+1/2}$, $\bar{u}_{j+1/2}$ удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений:

$$\frac{\bar{p}_{j+1/2} - p_{j+1/2,L}}{W_L} + (\bar{u}_{j+1/2} - u_{j+1/2,L}) = 0; W_L^2 = (\gamma p_{j+1/2,L} \rho_{j+1/2,L}) \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left[\frac{\bar{p}_{j+1/2}}{p_{j+1/2,L}} - 1 \right] \right)$$

$$\frac{\bar{p}_{j+1/2} - p_{j+1/2,R}}{W_R} - (\bar{u}_{j+1/2} - u_{j+1/2,R}) = 0; W_R^2 = (\gamma p_{j+1/2,R} \rho_{j+1/2,R}) \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left[\frac{\bar{p}_{j+1/2}}{p_{j+1/2,R}} - 1 \right] \right),$$

где $p_{j+1/2,L}$, $p_{j+1/2,R}$, $u_{j+1/2,L}$, $u_{j+1/2,R}$ – значения давления и скорости слева и справа от границы раздела ячеек, усредненные по соответствующей области зависимости.

Чтобы решить эту систему, используем метод Ньютона с фиксированным числом итераций [4, 7]. Кратко остановимся на описании этого метода. Пусть имеется нелинейное уравнение $f(x) = 0$

Допустим, что это уравнение имеет корень ξ , для нахождения которого нужно выбрать начальное приближение x_0 . Тогда корень нашего уравнения отыскивается с помощью процедуры:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\dots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

повторяемой требуемое число раз (до достижения заданной точности). Здесь введено обозначение $f'(x_n)$ для первой производной функции $f(x_n)$

Этот итерационный процесс быстро сходится, если начальное приближение x_0 выбрано достаточно близко к корню уравнения.

4 Интерполяция на эйлерову сетку

После завершения расчета на очередном временном шаге происходит интерполяция плотности, скорости, давления и энергии на исходную эйлерову сетку. Этот шаг необходим для того, чтобы учесть деформации, которые может испытывать лагранжева сетка в процессе расчета.

Рассмотрим алгоритм переинтерполяции. Относительно эйлеровой сетки перемещения узлов лагранжевой сетки выглядят как втекание и вытекание массы, импульса и энергии через неподвижные границы эйлеровой сетки.

Для нахождения новых значений плотности, скорости, давления и полной энергии на эйлеровой сетке записывается баланс массы, импульса и полной энергии в каждой ячейке.

Для этого находится величина зоны пересечения соответствующих ячеек лагранжевой и эйлеровой сетки:

$$\alpha = x_i - x0_i$$

Здесь x_i — координаты узлов лагранжевой сетки, $x0_i$ — узлы эйлеровой сетки. Рассмотрим частный случай, когда узлы лагранжевой сетки движутся влево. В этом случае $\alpha < 0$, и в эйлерову ячейку масса втекает через правую границу, а вытекает через левую. Эти потоки рассчитываются с помощью метода РРМ. Средние значения массы, скорости и полной энергии по области пересечения соответствующих ячеек лагранжевой и эйлеровой сеток вычисляются следующим образом:

$$fm_i = \alpha \left(\rho_{L,i-1} + \delta\rho_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \left(\delta\rho_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \rho\delta_{i-1} \right) \right) \right),$$

$$u_i = \alpha \left(u_{L,i-1} + \delta v_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \left(\delta u_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} u\delta_{i-1} \right) \right) \right),$$

$$E_i = \alpha \left(E_{L,i-1} + \delta E_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \left(\delta E_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} E\delta_{i-1} \right) \right) \right)$$

Если лагранжева сетка движется вправо ($\alpha > 0$), то эти формулы принимают вид:

$$fm_i = \alpha \left(\rho_{L,i} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \left(\delta\rho_i + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \rho\delta_i \right) \right) \right),$$

$$u_i = \alpha \left(u_{L,i} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \left(\delta u_i + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_i} u\delta_i \right) \right) \right),$$

$$E_i = \alpha \left(E_{L,i} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \left(\delta E_i + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_i} E\delta_i \right) \right) \right)$$

Рассматривая баланс втекающих и вытекающих в ячейку потоков, можно посчитать новую массу, импульс (найти скорость) и энергию в эйлеровой ячейке. Для обозначения новой величины на эйлеровой сетке используем верхний индекс e , а для обозначения этой же величины на лагранжевой сетке — верхний индекс l

$$m_i^e = \frac{m_i \delta V_i + fm_i^l - fm_{i+1}^l}{\delta V_i^0},$$

$$u_i^e = \frac{u_i^e \rho_i^e \delta V_i^0 + fm_i^l u_i^l - fm_{i+1}^l u_{i+1}^l}{\rho_i^e \delta V_i^0},$$

$$E_i^e = \frac{E_i^e \rho_i^e \delta V_i^0 + fm_i^l E_i^l - fm_{i+1}^l E_{i+1}^l}{\rho_i^e \delta V_i^0},$$

где δV_i^0 – объем ячейки на фиксированной эйлеровой сетке.

Давление находим из уравнения состояния:

$$P_i^e = \gamma \rho_i^e \left(E_i^e - \frac{1}{2} \left[(u_i^e)^2 + (v_i^e)^2 + (w_i^e)^2 \right] \right).$$

При расчетах использовались граничные условия полного отражения и нулевого градиента, которые в разностном виде для одномерной задачи вдоль направления оси x имеют вид:

полное отражение

$$\begin{aligned} \rho_{n \min-1} &= \rho_{n \min}, & \rho_{n \min-2} &= \rho_{n \min+1}, & \rho_{n \max-1} &= \rho_{n \max}, & \rho_{n \max-2} &= \rho_{n \max+1}, \\ u_{n \min-1}^x &= -u_{n \min}^x, & u_{n \min-2}^x &= -u_{n \min+1}^x, & u_{n \max-1}^x &= -u_{n \max}^x, & u_{n \max-2}^x &= -u_{n \max+1}^x, \\ P_{n \min-1} &= P_{n \min}, & P_{n \min-2} &= P_{n \min+1}, & P_{n \max-1} &= P_{n \max}, & P_{n \max-2} &= P_{n \max+1} \end{aligned}$$

нулевой градиент

$$\begin{aligned} \rho_{n \min-1} &= \rho_{n \min}, & \rho_{n \min-2} &= \rho_{n \min}, & \rho_{n \max-1} &= \rho_{n \max}, & \rho_{n \max-2} &= \rho_{n \max}, \\ u_{n \min-1}^x &= u_{n \min}^x, & u_{n \min-2}^x &= u_{n \min}^x, & u_{n \max-1}^x &= u_{n \max}^x, & u_{n \max-2}^x &= u_{n \max}^x, \\ P_{n \min-1} &= P_{n \min}, & P_{n \min-2} &= P_{n \min}, & P_{n \max-1} &= P_{n \max}, & P_{n \max-2} &= P_{n \max} \end{aligned}$$

5 Учет вязкости

В общем виде учет диссипации кинетической энергии в жидкости или газе из-за наличия внутреннего трения осуществляется с использованием вязкого тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x^k} \right), \text{ где } \mu - \text{коэффициент вязкости.}$$

На первом этапе освоения и изучения метода РРМ, а также в целях сохранения однородности численного алгоритма при расчетах методом РРМ вязкость вводится как добавка к газокинетическому давлению (вязкое давление): $\omega = -\mu \partial v_i / \partial x^i$. В случае двумерной или трехмерной задачи такой способ учета вязкости соответствует допущению о слабом изменении компонент скорости вдоль поперечных направлений. Учет перекрестных производных от скорости в вязком тензоре не представляет принципиальных затруднений. В системе (14) это приведет к изменению компонент скорости $v_y = \vartheta$ и $v_z = w$ при решении промежуточной задачи в лагранжевых координатах при расщеплении вдоль направления оси x.

При указанном способе учета вязкости вдоль выбранного направления решается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} x_{j+1/2}^{n+1} &= x_{j+1/2}^n + \Delta t \bar{u}_{j+1/2}, \\ \tau_j^{n+1} &= \frac{x_{j+1/2}^{n+1} - x_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta s_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{j+1/2} &= \bar{p}_{j+1/2} - \mu \left[\frac{1}{2} (\rho_{j+1}^n + \rho_j^n) \right] \left[\frac{u_{j+1} - u_j}{0.5(\Delta s_{j+1} + \Delta s_j)} \right] \\
\omega_{j-1/2} &= \bar{p}_{j-1/2} - \mu \left[\frac{1}{2} (\rho_j^n + \rho_{j-1}^n) \right] \left[\frac{u_j - u_{j-1}}{0.5(\Delta s_j + \Delta s_{j-1})} \right] \\
u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_j} (\omega_{j-1/2} - \omega_{j+1/2}) + \Delta t (f_j^n) \\
E_j^{n+1} &= E_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_j} (\bar{u}_{j-1/2} \omega_{j-1/2} - \bar{u}_{j+1/2} \omega_{j+1/2}) + \\
&\quad + \Delta t (u_j^n f_j^n) \\
\rho_j^{n+1} &= \frac{1}{\tau_j^{n+1}} \\
e_j^{n+1} &= E_j^{n+1} - \frac{1}{2} \left[(u_j^{n+1})^2 + (g_j^{n+1})^2 + (w_j^{n+1})^2 \right] \\
p_j^{n+1} &= (\gamma - 1) \rho_j^{n+1} e_j^{n+1} \\
T_j^{n+1} &= \frac{\gamma - 1}{R} e_j^{n+1}
\end{aligned}$$

Для остальных направлений учет вязкости выполняется аналогично.

6 Сглаживание решения

При расчетах в окрестностях ударных волн часто появляются нефизические осцилляции, искажающие решение в этих областях. Для уменьшения этого эффекта разработаны методы, сглаживающие решение вблизи ударных волн [2]. Рассмотрим этот механизм на примере сглаживания давления, действия в отношении других гидродинамических переменных абсолютно идентичны.

Итак, сглаженные значения давления находятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
p_{R,j} &= \phi_j p_j + (1 - \phi_j) p_{R,j} \\
p_{L,j} &= \phi_j p_j + (1 - \phi_j) p_{L,j}
\end{aligned}$$

где ϕ_j - функция-лимитер.

Остановимся более подробно на алгоритме получения этой функции. Для контроля гладкости решения введем обозначение:

$$\chi = \frac{|p_{j+1} - p_{j-1}|}{\min(p_{j+1}, p_{j-1})}$$

Переменная χ показывает, есть ли ударная волна в данной ячейке: если есть большой градиент давления, значит имеет место ударная волна, в этом случае значение χ полагается равным 1

$$\text{если } \frac{|P_{j+1} - P_{j-1}|}{\min(P_{j+1}, P_{j-1})} > \varepsilon \quad \text{и} \quad u_{j-1} - u_{j+1} > 0, \text{ то } \chi = 1,$$

во всех остальных случаях: $\chi = 0$

Далее необходимо ввести параметр, указывающий резкость скачка или ударной волны, что необходимо для более точного отрезания осцилляций:

$$\sigma_j = \chi \max\left(0, \left(\frac{P_{j+1} - P_{j-1}}{P_{j+2} - P_{j-2}} - \omega 1\right) \omega 2\right),$$

где $\varepsilon, \omega 1, \omega 2$ – свободные параметры.

И наконец, можно написать выражение для ϕ_j , учитывающее силу и резкость ударной волны:

$$\phi_j = \max\left(0, \min\left(\frac{1}{2}, \max(\sigma_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1})\right)\right)$$

Свободные параметры $\varepsilon, \omega 1, \omega 2$ – позволяют влиять на “мощность” лимитера. В нашем случае расчет производился со следующими значениями этих параметров:

$$\varepsilon = 0.33, \quad \omega 1 = 0.75, \quad \omega 2 = 5$$

7 Результаты расчетов

Изложенная выше методика была применена для численного моделирования серии задач таких как: задача Сода, обтекание уступа, взаимодействие ударной волны с пузырьком, трехмерная задача Сода и двойное маховское отражение. Ниже представлены результаты численного моделирования для перечисленных проблем и представлено сравнение с доступными из литературы данными.

7.1 Задача Сода

Эта задача также известна как задача о разрыве диафрагмы [1]. Расчетная область представляет собой отрезок $[0, 1]$, в котором заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} \rho &= 1, & p &= 1, & x &< 0.5 \\ \rho &= 0.125, & p &= 0.1, & x &> 0.5 \end{aligned}$$

Разрыв, заданный в середине расчетной области распадается на ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения. На рисунке 1 приведено сравнение результатов расчета с аналитическим решением для момента времени $t=0.2$. Наблюдается полное совпадение численных предсказаний с аналитикой.

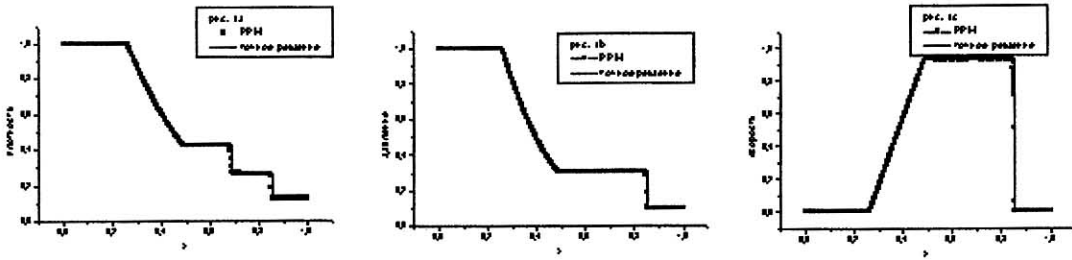


Рис.1· Сравнение численных предсказаний с аналитикой при $t=0.2$:

а) плотность, б) давление, с) скорость.

7.2 Обтекание уступа $M=3$

Задача об обтекании уступа решалась в двумерной области 3×1 для сетки 240×80 и граничных условий полного отражения. Уступ, высотой 0.2, находится на расстоянии 0.6 от левого края расчетной области. Задача решалась при начальных условиях:

$$\rho = 1.4; p = 1; \vartheta_x = 3M; \vartheta_y = 0$$

На рисунке 2а) приведено распределение плотности невязкого газа в стационарном режиме течения:

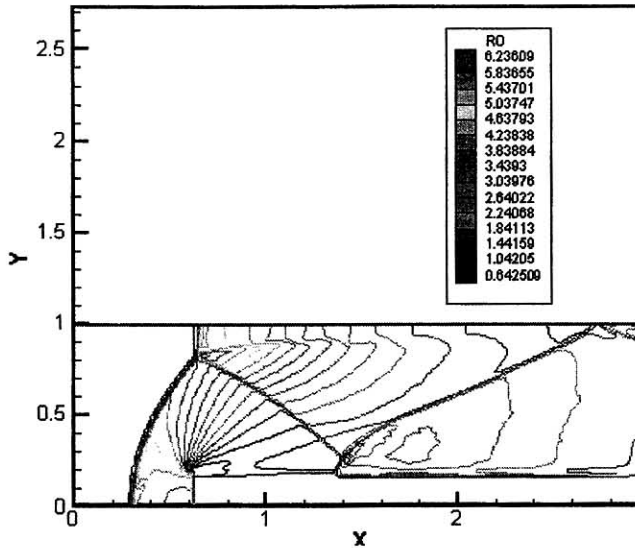


Рис.2а): Распределение плотности невязкого газа.

На рисунках 2б), 2с), 2д) и 2е) показаны линии уровня для плотности в различные моменты времени. Расчет проведен для значений числа Рейнольдса из диапазона 7.5-75.

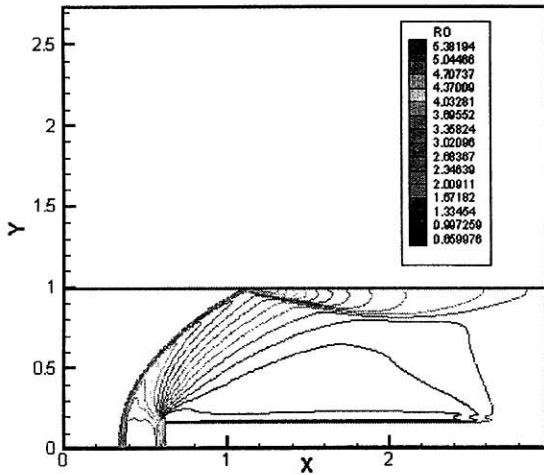


Рис.2b): $T=0.71; Re=75$

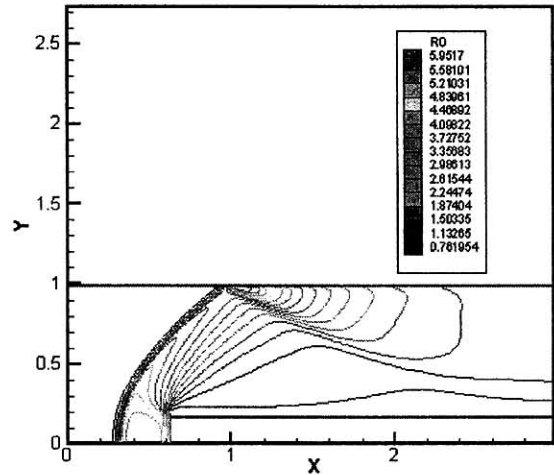


Рис.2c): $T=1.04; Re=20$

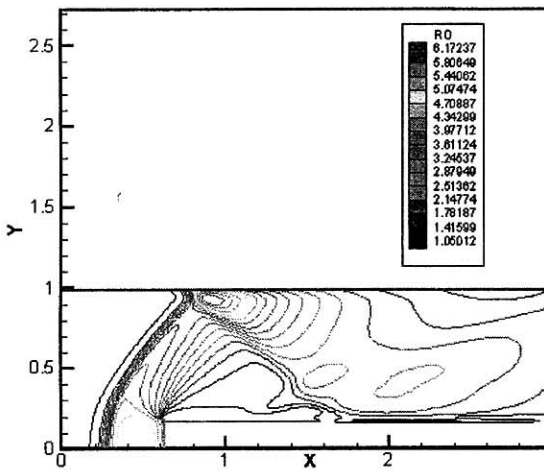


Рис.2d): $T=2.5; Re=12$

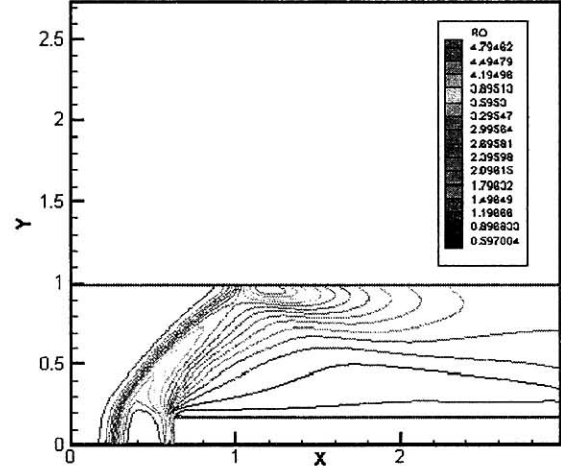


Рис.2e): $T=0.98; Re=7.5$

7.3 Взаимодействие ударной волны с пузырьком

В этом примере моделируется взаимодействие между плоской ударной волной и цилиндрического пузырька. Это пример может служить иллюстрацией движения ударной волны через неоднородную среду с завихренностью и перемешиванием. Подробное решение этой задачи можно найти в работе [9]. Здесь решается двумерная задача для двухкомпонентного газа. Мы рассмотрим двумерную задачу с простым газом. Расчетная область представляет собой прямоугольник $[0, 1.5] \times [0, 0.5]$. Центр пузырька с радиусом 0.2 расположен в точке. Первоначально скорость газа равна нулю, а давление 1 во всей области. Внутри пузырька плотность составляет 0.1, тогда как за пределами сферы плотность 1.0. Входящая ударная волна стартует из точки $x=0$ и распространяется в направлении оси x .

На рисунках 3a) и 3b) показано распределение плотности в расчетной области на ранних стадиях развития системы:

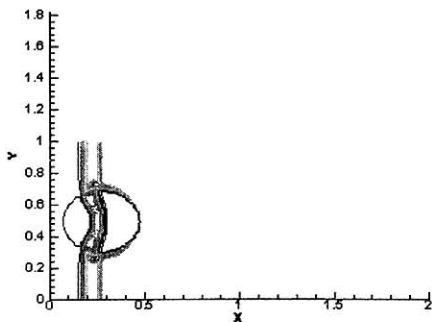


Рис.3а)

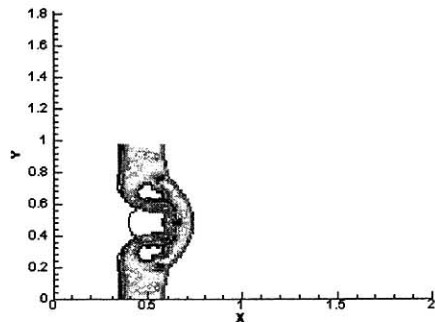


Рис.3б)

По мере прохождения ударной волной пузырька происходит деформация, которую видно из рисунка 3с), а затем схлопывание пузырька. На рисунке 3д) приведена картина вращающихся вихрей, распространяющихся вместе с ударной волной.

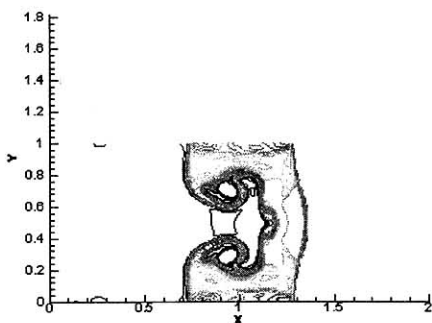


Рис.3с)

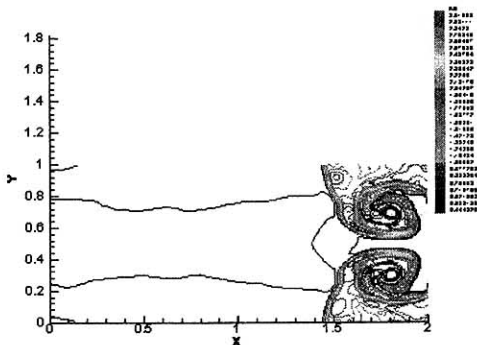


Рис.3д)

Для качественного сравнения эволюции взаимодействия пузырька и плоской ударной волны приведен рисунок 3е) из работы [10]:

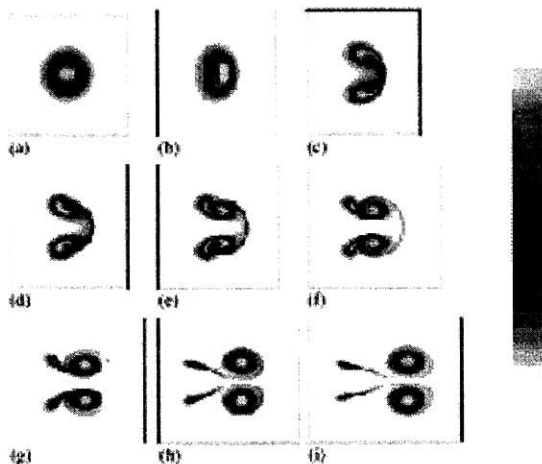


Рис.3е)

7.4 Трехмерная задача Сода

Моделируется распространения ударных волн и волн разрежения в кубической области с отражающими стенками. Размер расчетной области $\{x,y,z\}=[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Начальные условия разрывные.

Распределение давление и плотности в начальный момент времени устанавливается следующим образом: расчетная область делится на две части плоскостью, пересекающей оси в точках $x=0.5, y=0.5, z=0.5$. Затем в части, которая содержит начало координат устанавливаются плотности и давления, равные $\rho = 1, p = 1$, а в оставшейся части: $\rho = 0.125, p = 0.1$

Расчет выполнен на сетке $40 \times 40 \times 40$.

На рис.4а) показана эволюция решения на ранних стадиях (представлены распределения плотности в плоскостях $x=0, y=0, z=0$).

Далее ударная волна распространяется в область низкого давления, а в область высокого давления идет волна разрежения, что хорошо видно из рисунка 4б).

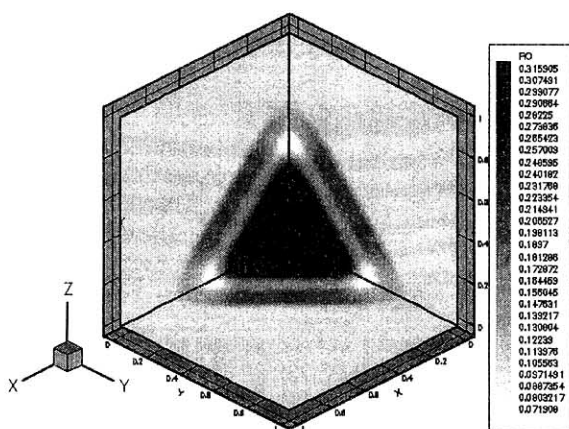


Рис.4а)

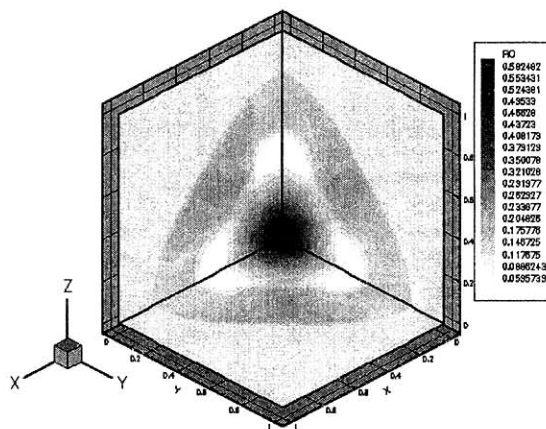


Рис.4б)

Доходя до стенок волны отражаются, как показано на рисунке 4с.

Последнее обстоятельство приводит к колебаниям плотности и давления, как на рисунке 4д.

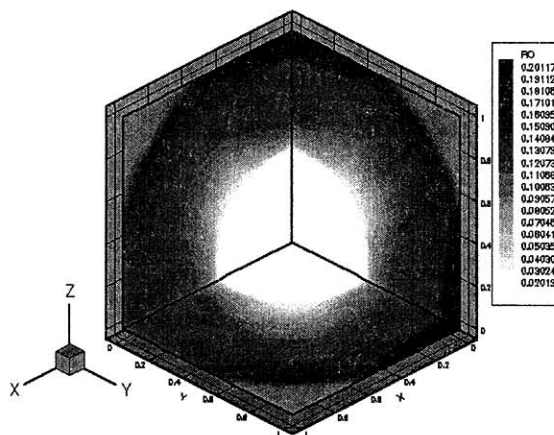


Рис.4с)

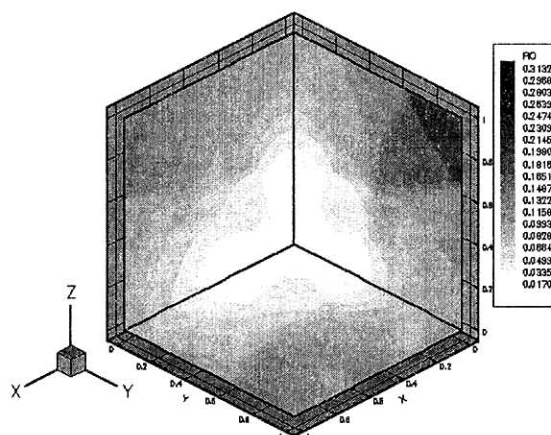


Рис.4д)

7.5 Двойное маховское отражение (Double Mach Reflection)

Явление двойного маховского отражения наблюдается, когда косая ударная волна набегает на отражающую стенку. Расчет проводился в области размера $[0, 4] \times [0, 1]$. Ударная волна при числе Маха $M=10$ в газе $\gamma = 1.4$ набегает на нижнюю отражающую стенку под углом $\alpha = 30^\circ$. Начальные условия для давления и плотности задавались равными: $p = 1, \rho = 1.4$

Расчет проводился на сетках 120×30 , 240×60 и 360×90 . Качественное совпадение было получено по картине линий плотности [9], которая приведена на рис. 5а для момента времени $t=0.21$.

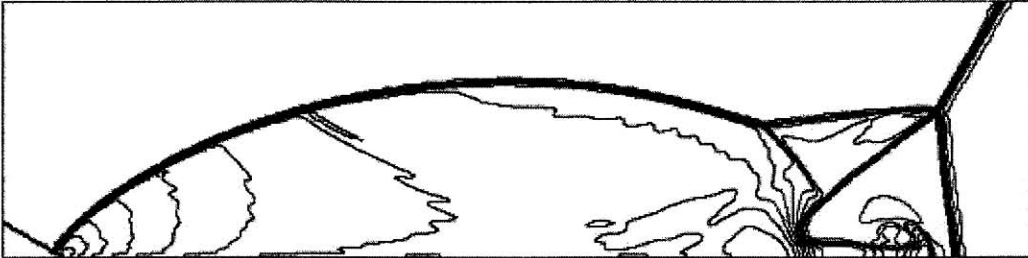


Рис.5а) Линии плотности из [9].

На тот же момент времени на рис. 5b, 5c, 5d приведены, полученные в ходе расчетов, распределения линий уровня для плотности. На рисунке 5e) приведено распределение плотности на момент времени $t=0.21$

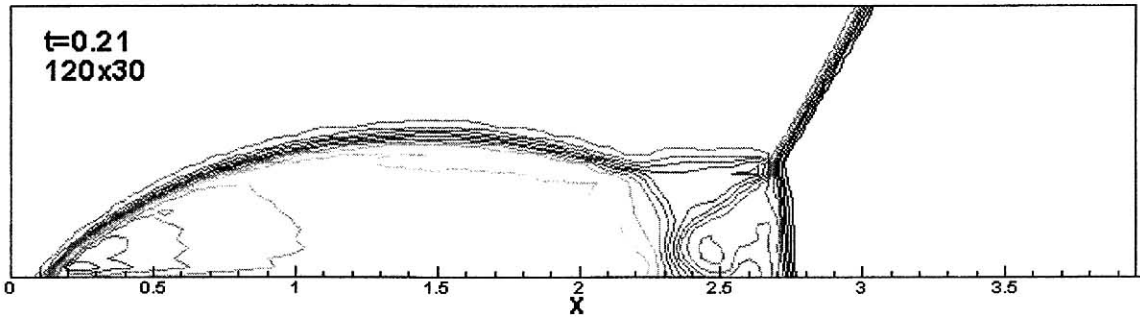


Рис. 5b):

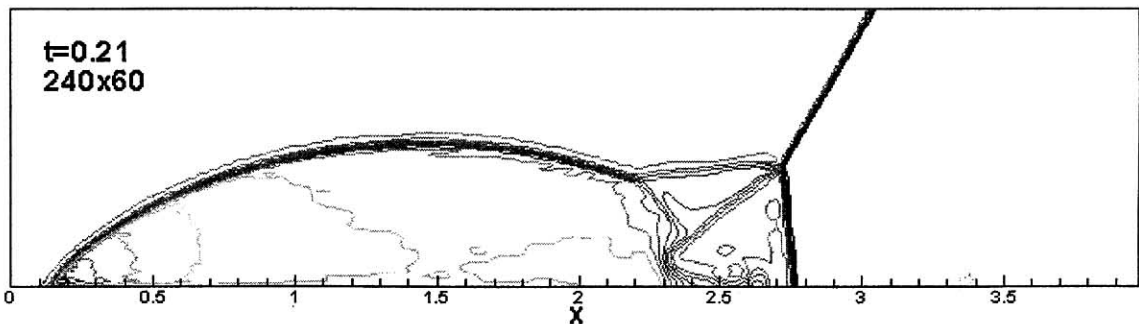


Рис. 5c):

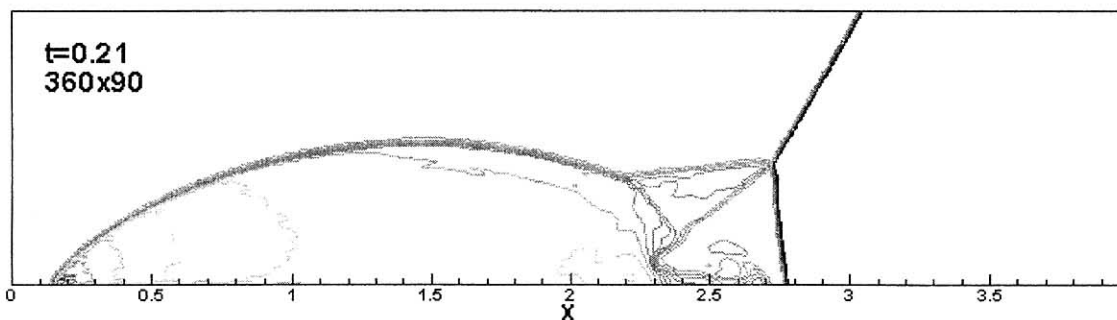


Рис. 5d):

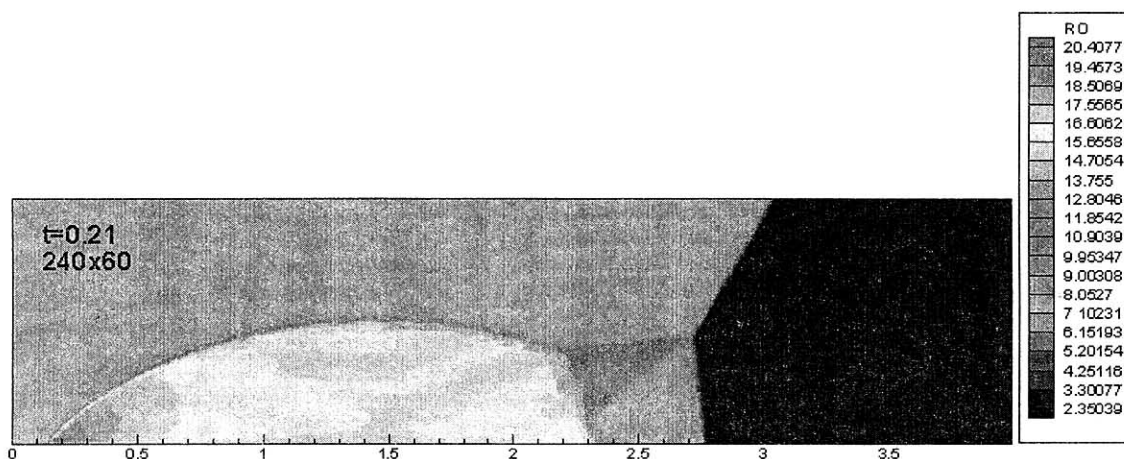


Рис. 5e):

На рис. 5f) и 5g) приведены графики давления и плотности вдоль нижней отражающей границы. На верхней картинке приведены результаты расчетов для различных сеток в момент времени $t = 0.21$, на нижней -соответствующие графики из работы [12].

Заключение

Несмотря на относительную сложность алгоритма, применяемого при реализации метода PPM, результаты численного расчета газодинамических течений в присутствии ударных волн и различных разрывов показывают, что метод позволяет гораздо более точно описывать поведение разрывных решений.

Существенным преимуществом метода является возможность введения в расчетную схему различных физических процессов, а также возможность обобщения метода на случай многофазных течений.

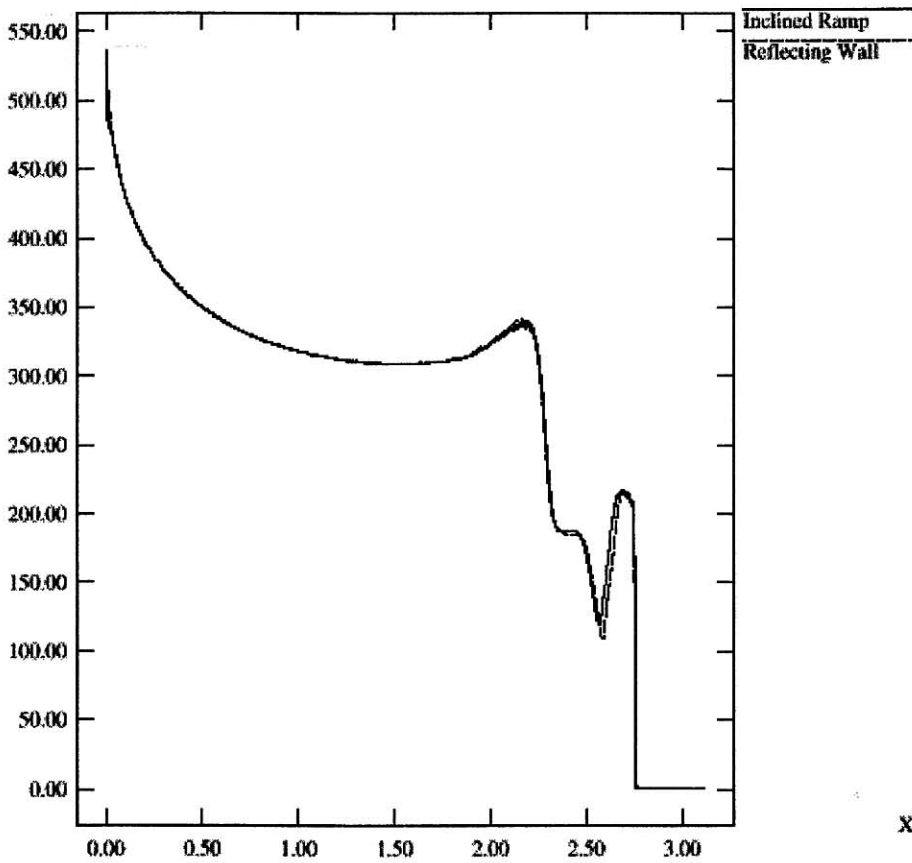
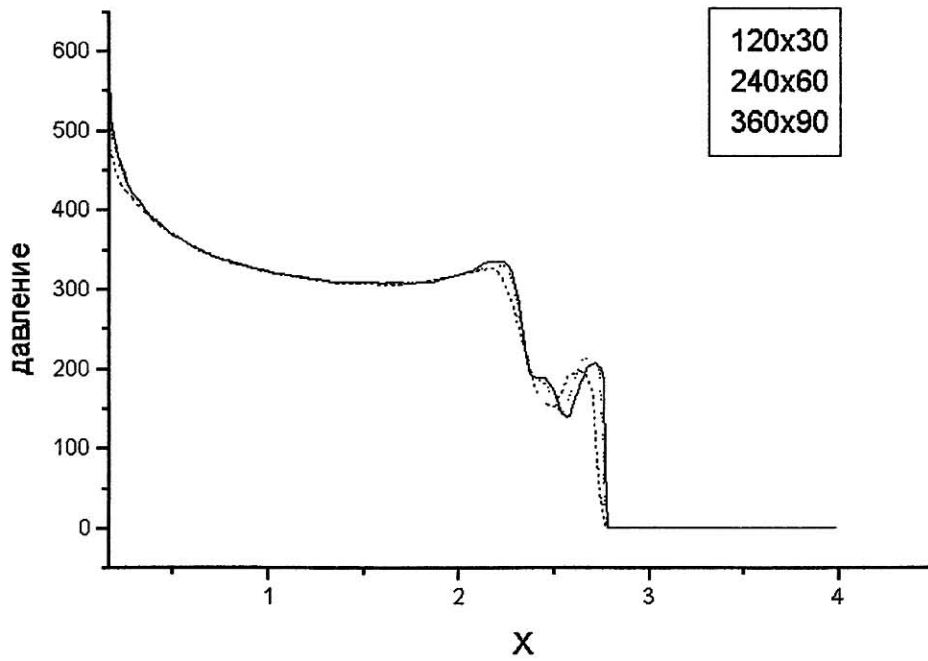


Рис. 5f):

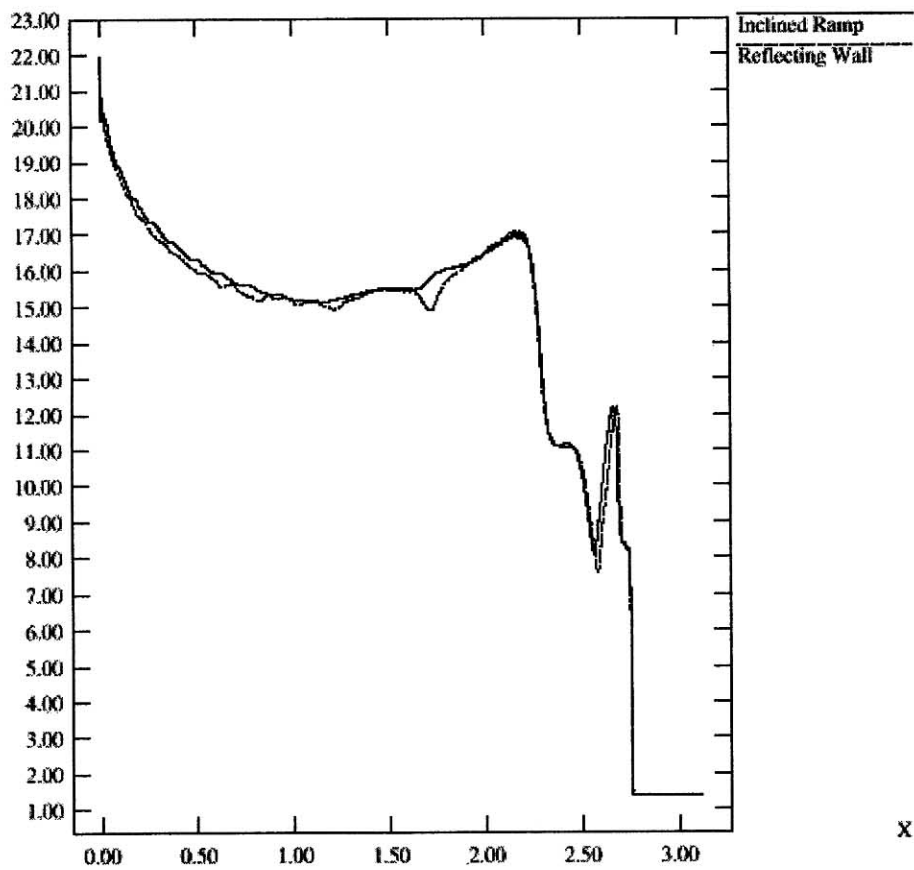
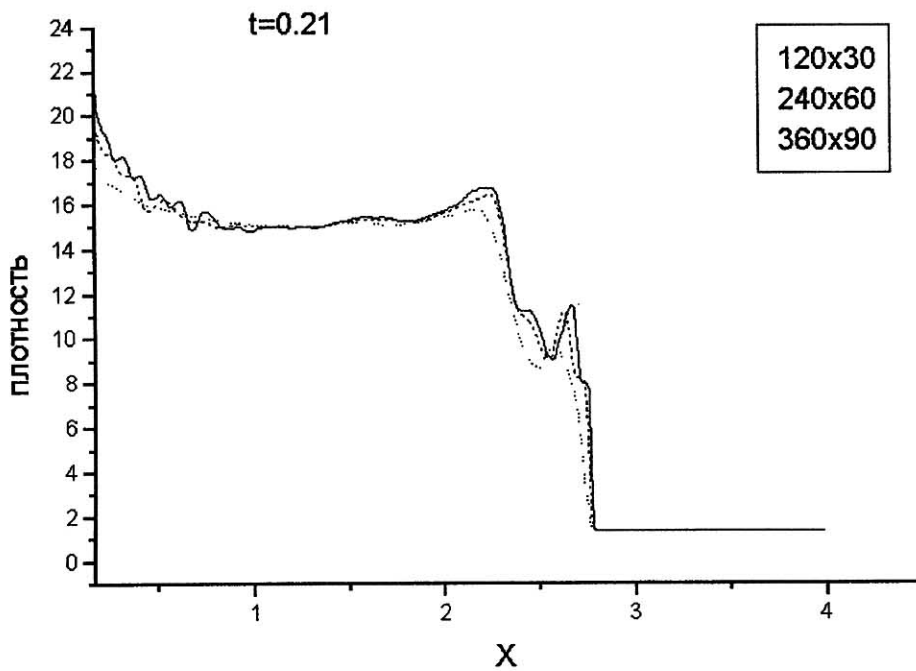


Рис. 5g):

Литература

1. Э. Оран, Дж. Борис, “Численное моделирование реагирующих потоков”, Мир, Москва, 1990.
2. Phillip Colella, Paul R. Woodward, “The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas—Dynamical Simulation”, J. Comput. Phys., Vol.54, n 1, 1984
3. А. А. Самарский, Ю. П. Попов, “Разностные методы решения задач газовой динамики”, Наука, 1992, Москва
4. В. Van Leer, J. Comput. Phys. 32 (1979), 101.
5. К. Флетчер, “Вычислительные методы в динамике жидкостей”, Мир, 1991, Москва.
6. У.Г. Пирумов, Г.С. Росляков, “Численные методы газовой динамики”, Высшая школа, Москва, 1987
7. Randall J. LeVeque, “Finite difference methods for differential equation”, University of Washington, 1998.
8. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, “Аддитивные схемы для задач математической физики”, Наука, Москва, 1999
9. J.J. Quirk, S. Karni, “On the dynamics of a shock—bubble propagation”, ICASE Report No 94-75.
10. J.O. Lanseth, R.J. LeVeque, “A wave propagation method for three—dimensional hyperbolic conservation laws”, January, 1997
11. J. A. Greenough, J. Bell, P. Colella, E.C. Puckett, J.W. Jacobcs, “A numerical study of shock—acceleration a diffuse helium cylinder”, UCRL—JC-122065 Preprint, 1995.
12. Randall J. LeVeque, Ken-Ming Shyue, “Two-Dimensional Front Tracking Based on High Resolution Wave Propagation Methods”, Journal of Computation Physics 123, 354—368, 1996.